# Equations fonctionnelles pour une fonction surun espace singulier

Tristan Torrelli

**UNIVERSITE DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS**
**FACULTE DES SCIENCES**

**Laboratoire J. A. Dieudonné**
**U.M.R. du C.N.R.S. No 6621**

# THESE

présentée pour obtenir le titre de
Docteur en SCIENCES
(spécialité : MATHEMATIQUES)

par

Tristan TORRELLI

## EQUATIONS FONCTIONNELLES POUR UNE FONCTION SUR UN ESPACE SINGULIER

Soutenue le 6 novembre 1998 devant le jury composé de :

| | |
|---|---|
| M. Daniel BARLET<br>Professeur à l'Université de Nancy | Rapporteur |
| M. Joël BRIANÇON<br>Professeur à l'Université de Nice | Directeur de thèse |
| M. Jean-Louis CATHELINEAU<br>Professeur à l'Université de Nice | Examinateur |
| M. Philippe MAISONOBE<br>Professeur à l'Université de Nice | Examinateur |
| M. Zoghman MEBKHOUT<br>Directeur de Recherche à l'Université Paris VII | Rapporteur |
| M. Michel MERLE<br>Professeur à l'Université de Nice | Président |

à 14 heures, en salle de conférences.

Je suis heureux d'exprimer toute ma gratitude à Joël Briançon, mon directeur de thèse. Je rends hommage à l'implication totale qu'il adopte généreusement chaque fois qu'on le sollicite. Enfin, je le remercie pour la confiance qu'il me manifesta régulièrement tout au long ces années.

Je remercie vivement Philippe Maisonobe pour ses nombreux conseils et autres remarques pertinentes sur le présent travail, et aussi pour tout ce qu'il m'a appris de la théorie des $\mathcal{D}$-modules, manifestant toujours le même enthousiasme.

Je suis très reconnaissant au professeur Daniel Barlet et à Zoghman Mebkhout pour avoir accepté la charge de rapporteur, et à Michel Merle, qui me fait l'honneur de présider ce jury.

Je remercie Jean-Louis Cathelineau d'avoir accepté de participer à ce jury.

Ma gratitude va également à chacun des membres du personnel du Laboratoire. Ils s'efforcent toujours de nous aider au mieux lorsqu'on les sollicite.

Je tiens à remercier Hélène, Antoine, Gil et Raphaël pour leur soutien amical et régulier.

Enfin, je n'oublie pas tous ceux, collègues[1] et autres, qui m'ont entouré durant ces années.

1. Notamment les sympathiques géomètres souvent côtoyés aux séminaires.

# Introduction

Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ un voisinage de l'origine. Notons $\mathcal{O}_\Omega$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $\Omega$, de fibre à l'origine $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, $\mathcal{D}_\Omega$ l'anneau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans $\mathcal{O}_\Omega$ et $\mathcal{D} = \mathcal{O}\langle \partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\rangle$ sa fibre à l'origine.

Soit $f : \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction analytique non constante, nulle à l'origine. Dans [K2], M. Kashiwara montre que pour toute section locale $m$ d'un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome $\mathcal{M}$, il existe une équation fonctionnelle :

$$b(s)mf^s = P.mf^{s+1}$$

dans $\mathcal{M}_0[s, 1/f]f^s$, avec $P \in \mathcal{D}[s]$ et $b(s) \in \mathbf{C}[s] - \{0\}$. On appelle *polynôme de Bernstein de la section $mf^s$ à l'origine*, et l'on note $b(mf^s, s)$, le générateur unitaire de l'idéal des polynômes $b(s)$ qui satisfont à cette identité. Nous le noterons $b(mf^s, s)$. Quand $\mathcal{M} = \mathbf{C}[\underline{x}]$, $m = 1$ et $f$ est polynomiale, ce résultat, dû à I.N. Bernstein ([Bn]), est à l'origine de la théorie du polynôme de Bernstein - Sato. Un résultat fondamental de cette théorie - établi par B. Malgrange ([Ml1], [Ml2]) - est que les racines de $b(f^s, s)$ sont étroitement liées aux valeurs propres des monodromies locales associées à $f$ (très précisément, ce sont les $e^{-2i\pi\alpha}$, $\alpha$ décrivant l'ensemble des racines de $b(f^s, s)$). Ce résultat fut généralisé par M. Kashiwara pour un $\mathcal{D}$-module holonome régulier $\mathcal{M}$ quelconque, aboutissant à la théorie de la $V$-filtration ; les racines des polynômes $b(mf^s, s)$, $m \in \mathcal{M}$ sont alors reliées aux valeurs propres de la monodromie de $\Psi_f(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_\Omega}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_\Omega))$ au voisinage de l'origine, faisceau pervers des cycles proches de Grothendieck - Deligne du complexe des solutions de $\mathcal{M}$ (théorème 1.2.2.1). Cette généralisation apparaît maintenant - suivant le point de vue de Z. Mebkhout - comme un cas très particulier du théorème de Comparaison de Grothendieck ([Gt] ; signalons au passage la preuve de Z. Mebkhout par récurrence sur la dimension ([Mb6])).

Précisons l'historique de ce résultat. Dans sa preuve, M. Kashiwara réalise les cycles proches comme solutions d'un certain gradué $\mathrm{gr}^0_G\,\mathfrak{m}$ ([K5]). Sa démonstration utilise une propriété forte de la régularité : l'existence de $b$-fonctions contrôlées. Par la suite, Z. Mebkhout et C. Sabbah obtinrent cette généralisation comme conséquence directe de la définition de la régularité et du formalisme de la théorie des $\mathcal{D}$-Modules ([M.Sb], [Sb1]).

Soit maintenant $g = (g_1, \dots, g_p) : \Omega \to \mathbf{C}^p$ une application analytique nulle à l'origine, définissant une intersection complète $X$ en 0. Rappelons que Lê D. T. associe à $f|_X : (X_{\text{red}}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ une fibration continue localement triviale analogue à celle de J. Milnor lorsque $X$ est lisse ([Lê2], [Mn]). Afin d'étudier le «polynôme de Bernstein de la restriction de $f$ à $X$», d'après ce qui précède, il faut trouver un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome régulier dont le complexe des solutions $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_\Omega}(\mathcal{R}, \mathcal{O}_\Omega)$ soit le faisceau pervers $\mathbf{C}_X\,[p]$. Le $p^{ème}$-groupe de cohomologie locale algébrique de $\mathcal{O}_\Omega$ - introduite par A. Grothendieck - à support dans $X$ :

$$\mathcal{R} = R^p\Gamma_X(\mathcal{O}_\Omega)_{alg} = \frac{\mathcal{O}_\Omega\,[1/g_1 \dots g_p]}{\sum_{i=1}^p \mathcal{O}_\Omega\,[1/g_1 \dots \check{g}_i \dots g_p]}$$

convient. Cela résulte une nouvelle fois du théorème de Comparaison ([Mb1]).

Dans ce travail, nous étudions les polynômes de Bernstein des sections de $\mathcal{R}$ lorsque $(f, g)$ définit une intersection complète à l'origine, en essayant d'étendre les résultats de la théorie classique.

Le premier chapitre rassemble les résultats généraux sur lesquels s'appuient notre étude. Nous donnons d'abord des généralités sur les polynômes de Bernstein des sections $mf^s$, $m \in \mathcal{M}$. Notamment, nous rappelons l'expression de la variété caractéristique de $\mathcal{D}[s]mf^s$ donnée par V. Ginsburg ([Gn]) lorsque $\mathcal{M}$ est holonome régulier (voir aussi [K1], [Sb3]), résultat qui s'obtient à l'aide du théorème 1.2.2.1 à partir de la définition de Z. Mebkhout de la régularité. Compte tenu de notre objectif, nous précisons ensuite les liens évoqués plus haut entre les racines de nos $b$-fonctions et les valeurs propres de la monodromie.

Enfin, nous débutons l'étude des polynômes $b(\delta f^s, s)$, $\delta \in \mathcal{R}$, dans les situations les plus simples ($g$ submersion à l'origine ; $p = 1$ et $f$ lisse). Nous montrons notamment que lorsque $X$ est lisse à l'origine, le polynôme de Bernstein de la restriction de $f$ à $X$ coïncide avec celui de la section de $\mathcal{R}$ définie par $1/g_1 \cdots g_p$. Constatons enfin qu'il est clair que la monodromie locale de $z : (\{h - z^N = 0\}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ est liée à celle de $h : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$. Nous terminons le chapitre en donnant une formule qui relie le polynôme de Bernstein de $(\dot{1}/h(\underline{x}) - v(\underline{y})z^N)z^s$ à celui de $h$, $v$ étant un germe de fonction holomorphe non nulle ; ce qui nous conforte dans notre étude.

Au chapitre deux, nous étudions les notions de polynômes de Bernstein génériques et relatifs pour les sections $\delta F^s$, $\delta \in \mathcal{R}$, lorsque $F : \Omega \times Y \to \mathbf{C}$

est une déformation de $f$ définie sur un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$. Essentiellement, nous cherchons des conditions d'existence d'équations fonctionnelles :

$$h(y)b(s)\delta F^s = P\delta F^{s+1}$$

où $b(s) \in \mathbf{C}[s]-\{0\}$, $h(y) \in \mathbf{C}\{y\}-\{0\}$ et $P \in \mathcal{D}_{\Omega\times Y|Y,0}[s] = \mathbf{C}\{x,y\}\langle\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n\rangle[s]$. Quand cela existe, on appelle *polynôme de Bernstein générique de* $\delta F^s$ le polynôme $b(s)$ unitaire non nul de plus bas degré qui satisfait une telle équation. On le note $b_g(\delta F^s, s)$. Lorsque l'on impose que $h(y)$ soit inversible, c'est la notion de *polynôme de Bernstein relatif*, noté $b_r(\delta F^s, s)$.

Ces notions furent introduites par F. Geandier dans le cas d'une déformation d'hypersurface afin d'étudier comment varient les racines du polynôme de Bernstein lors d'une déformation analytique. Lorsque l'espace des paramètres est de dimension un, elle établit l'existence de $b_g(F^s, s)$ ([Ge1]). Si de plus $F$ définit une déformation à nombre de Milnor constant le long de $Y$, elle montre l'existence de $b_r(F^s, s)$. La réciproque de ce résultat fut établie dans [B.L.M].

Dans [Bs], H. Biosca étudie l'existence de polynômes de Bernstein génériques associés à un germe d'application analytique. En adaptant ses résultats, nous montrons que $b_g(\delta F^s, s)$ existe lorsque l'espace des paramètres est de dimension un, lorsque l'application $(g, F)$ est polynomiale en $x$, ou lorsque $g$ et $(f, g)$ définissent des intersections complètes à singularité isolée à l'origine et que $F$ s'annule sur l'espace des paramètres.

Nous donnons ensuite des conditions nécessaires et suffisantes d'existence du polynôme de Bernstein relatif, reprenant [B.Gr.M]. Nous traitons enfin le cas particulier des déformations équisingulières à un paramètre, affinant dans notre cadre un résultat de [B.Gr.M]. Insistons sur les implications *2* $\Rightarrow$ *5* et *4* $\Rightarrow$ *5* ci-dessous, qui sont selon nous des résultats géométriques fort intéressants :

THÉORÈME 2.2.2.5 *Soit* $\widetilde{\Omega} = \Omega \times Y \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$, *un polydisque centré en l'origine. Soient* $g = (g_1, \ldots, g_p) : \Omega \to \mathbf{C}^p$ *et* $(f, g) : \Omega \to \mathbf{C}^{p+1}$, *des applications analytiques, nulles à l'origine, définissant des intersections complètes* $X$ *et* $Z$ *à singularité isolée. Soit enfin* $F : \widetilde{\Omega} \to \mathbf{C}$, *une déformation de* $f$. *Notons* $\widetilde{Z} \subset \widetilde{\Omega}$, *l'espace défini par* $(F, g)$, *et* $\mathcal{R}$ *le module de cohomologie locale algébrique de* $\mathcal{O}_{\widetilde{\Omega}}$ *à support dans* $\widetilde{X} = X \times Y \subset \widetilde{\Omega}$.

*Les propriétés suivantes sont équivalentes (au voisinage de* $0$*) :*

1. *pour toute section locale* $\delta \in \mathcal{R}$ *non nulle,* $\delta F^s$ *admet un polynôme de Bernstein relatif.*

2. *la projection* $\pi_2 : \widetilde{\Omega} \to Y$ *est* non caractéristique *pour* $\mathcal{R}[1/F]$ *au voisinage de tout* $x_0 \in F^{-1}(0)$ *:*

$$\operatorname{car}(\mathcal{R}[1/F]) \cap T^*_{\pi_2^{-1}(\pi_2(x_0))}\widetilde{\Omega} \subset T^*_{\widetilde{\Omega}}\widetilde{\Omega}$$

3. $\mathcal{R}[1/F]$ *est* $\mathcal{D}_{\widetilde{\Omega}|Y}$*-cohérent.*

4. $\widetilde{Z}$ *est une déformation de* $Z$ *à* $\mu$*-constant le long de l'axe des paramètres.*

5. $\{\widetilde{X} - \widetilde{Z}, \widetilde{Z} - \{0\} \times Y, \{0\} \times Y\}$ *est une stratification de* $\widetilde{X}$ *satisfaisant à la condition* $(\mathrm{a}_F)$ *de Thom.*

Au chapitre trois, nous généralisons pour les germes de $\mathcal{D}$-modules la construction faite par B. Malgrange dans [Ml1] pour étudier le polynôme de Bernstein d'un germe de fonction à singularité isolée. Très précisément, nous montrons que si $\mathcal{M}$ est la fibre à l'origine d'un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome régulier, sans $f$-torsion, et si $m \in \mathcal{M} - f\mathcal{M}$ satisfait aux trois conditions suivantes :

**(i)** l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $m$, noté $\operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} m$, admet un système de générateurs $(\diamondsuit_1, \dots, \diamondsuit_l)$ constitué d'opérateurs de degré au plus un.

Pour $k = 1, \dots, l$, posons $\diamondsuit_k = \diamondsuit'_k + \diamond_k$ où $\diamondsuit'_k$ n'a pas de terme constant dans l'écriture avec coefficients à gauche, et $\diamond_k = \diamondsuit_k.1 \in \mathcal{O}$.

**(ii)** l'idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ engendré par les éléments de $\operatorname{Ann}_{\mathcal{O}} m$ et les $\diamondsuit'_k(f)$ est de colongueur finie (i.e. la dimension sur $\mathbf{C}$ de $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ est finie).

**(iii)** l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $mf^s$ est contenu dans $\mathcal{D}\mathcal{J}$.

alors le $\mathcal{D}[s]$-module $\mathcal{N} = (s+1)(\mathcal{D}[s]mf^s/\mathcal{D}[s]mf^{s+1})$ est supporté par l'origine et est isomorphe à $\mathcal{D}[s]mf^s/\mathcal{D}[s](f, \mathcal{J})mf^s$. Ce qui permet d'exprimer $b(mf^s, s)$ à partir de l'action de $s$ sur le $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $H^n_{DR}(\mathcal{N}) = \mathcal{N}/\sum_{i=1}^n (\partial/\partial x_i)\mathcal{N}$, que l'on sait alors décrire explicitement comme un quotient $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$ d'espaces vectoriels de dimension finie.

Nous cherchons ensuite des hypothèses sur l'application $(f, g)$ pour qu'il existe des éléments de $\mathcal{R}$ qui satisfont aux trois conditions précédentes. Après un calcul d'annulateur basé sur l'expression de la variété caractéristique de $\mathcal{D}_\Omega \delta f^s$, $\delta \in \mathcal{R}$, une étude approfondie de la condition **(i)** nous mène à une nouvelle caractérisation de la quasi-homogénéité pour un germe de fonction à singularité isolée (théorème 3.2.2.3). Nous obtenons finalement le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2.2.8 *Soient $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ un voisinage de l'origine, $g = (g_1, \ldots, g_p)$ et $(f, g)$ deux applications analytiques définies sur $\Omega$ et définissant des intersections complètes à singularité isolée à l'origine. Dans les situations suivantes, les conditions* **(i)-(iii)** *sont satisfaites pour l'élément $u \in \mathcal{R}$ alors précisé :*

- **(a)** *il existe un système de coordonnées dans lequel l'application $g$ est quasi-homogène ; si $p \geq 2$, les applications $(g_1, \ldots, g_i)$, $i = 2, \ldots, p$, définissent des intersections complètes à singularité isolée à l'origine ; l'entier $-1$ est la plus petite racine entière du polynôme de Bernstein de $g_1^s$, et, si $p \geq 2$, de celui de la section $(\dot{1}/g_1 \cdots g_i) g_{i+1}^s$, pour tout $i = 1, \ldots, p-1$, où $\dot{1}/g_1 \cdots g_i \in \mathcal{O}[1/g_1 \cdots g_i] / \sum_{j=1}^{i} \mathcal{O}[1/g_1 \cdots \check{g}_j \cdots g_i]$ ; $u = \dot{1}/g_1 \cdots g_p \in \mathcal{R}$.*

- **(b)** *la fonction $f$ est lisse à l'origine, $g$ est une fonction quasi-homogène, et $u \in \mathcal{R}$ est défini à partir de $1/g^\ell$, où $\ell \in \mathbf{N}^*$ est un entier tel que la plus petite racine entière du polynôme de Bernstein de $g$ est supérieure ou égale à $-\ell$.*

*De plus lorsque $p = 1$, les hypothèses supplémentaires sur $g$ sont nécessaires.*

(rappelons qu'un élément de $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ est dit quasi-homogène de degré $\varrho \in \mathbf{Q}^+$ pour le système de poids $\alpha \in (\mathbf{Q}^{*+})^n$ si c'est une combinaison $\mathbf{C}$-linéaire de monômes $x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n}$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in (\mathbf{N}^*)^n$ tels que $\alpha.\gamma = \varrho$.)

Le dernier chapitre est consacré au calcul du polynôme de Bernstein de $\delta f^s$ lorsque $g$ est une application quasi-homogène pour un système de poids $\alpha \in (\mathbf{Q}^{*+})^n$, définissant une intersection complète à singularité isolée à l'origine, et que l'application $(\mathrm{in}_\alpha f, g)$ définisse une intersection complète à singularité isolée à l'origine (le morphisme $(f, g)$ est alors *semi-quasi-homogène* pour le système $\alpha$). La construction faite au chapitre précédent est l'outil clef.

Sous l'hypothèse **(a)** donnée plus haut, nous généralisons au cas de la section $\delta f^s$ l'algorithme développé par J. Briançon, M. Granger, Ph. Maisonobe et M. Miniconi pour le calcul du polynôme de Bernstein d'une fonction semi-quasi-homogène ([B.G.M.M]). L'idée générale est que la quasi-homogénéité fournit une filtration naturelle sur les objets introduits au chapitre trois, filtration compatible avec l'action de $s$. Le polynôme de Bernstein de $\delta f^s$ s'exprime alors à partir des sauts de la filtration induite sur l'espace $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$ :

$$b(\delta f^s, s) = (s+1) \prod_{\mathcal{Z}_q \subsetneq \mathcal{Z}'_q} (s - \varrho + |\alpha| + q)$$

le rationnel $\varrho$ désignant le degré du polynôme quasi-homogène $g_1 \cdots g_p$ lorsque $\alpha$ est choisi tel que $f$ soit d'ordre un. On donne ensuite un procédé effectif pour calculer ces sauts. Comme application, nous donnons des calculs de polynômes de Bernstein génériques de déformations semi-quasi-homogènes lorsque $n = 2$, $p = 1$.

Puis nous étudions en détail le cas particulier des applications $(f, g)$ quasi-homogènes à singularité isolée. A partir de la construction du chapitre trois, nous obtenons alors des formules de multiples du polynôme de Bernstein pour les section $\delta_L$, $L = (l_1, \dots, l_p) \in (\mathbf{N}^*)^p$, classe de $1/g_1^{l_1} \cdots g_p^{l_p}$ dans $\mathcal{R}$. Nous nous intéressons ensuite à la détermination du polynôme de Bernstein de $\delta f^s$. Nous obtenons notamment le résultat suivant :

Théorème 4.2.2.1 *Soient $f, g_1, \dots, g_p \in \mathbf{C}[x]$, des polynômes non constants, quasi-homogènes pour un même système de poids $\alpha \in (\mathbf{Q}^{+*})^n$, tels que les applications $g = (g_1, \dots, g_p)$ et $(f, g)$ définissent des intersections complètes à singularité isolée à l'origine. Sans perte de généralité, nous supposerons que $f$ est de degré un. Notons $\varrho \in \mathbf{Q}^{*+}$, le degré de $g_1 \cdots g_p \in \mathbf{C}[x]$, $\Pi \subset \mathbf{Q}^+$ l'ensemble des degrés des éléments d'une cobase quasi-homogène de l'idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ engendré par les polynômes quasi-homogènes $f, g_1, \dots, g_p$, et par les mineurs maximaux de la jacobienne de $(f, g)$. Notons enfin $c(s)$ le polynôme réduit $\prod_{q \in \Pi}(s - \varrho + |\alpha| + q) \in \mathbf{C}[s]$.*

*Alors $b(\delta f^s, s)$ divise $(s+1)c(s)$ et est un multiple de* $\mathrm{ppcm}(s+1, c(s))$. *En particulier, le réduit de $b(\delta f^s, s)$ coïncide avec celui de $(s+1)c(s)$.*

Pour lever l'indétermination éventuelle sur la multiplicité de la racine $-1$, il suffit de rajouter les hypothèses de la situation **(a)**. On trouve alors que $b(\delta f^s, s) = (s+1)c(s)$. Ce résultat généralise bien la formule classique du polynôme de Bernstein d'une fonction quasi-homogène à singularité isolée. Nous étudions ensuite le cas particulier où $p = 1$ et $f$ est lisse.

Pour finir, nous traitons des exemples où les formules obtenues ne sont plus utilisables. Nous calculons d'abord $b(\delta f^s, s)$ lorsque $g(x) = \sum_{i=1}^4 x_i^2$ et $f(x) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i x_i^2$, les $\lambda_i \in \mathbf{C}$ étant deux-à-deux distincts. C'est l'exemple le plus simple où les conditions **(i)-(iii)** ne sont pas satisfaites pour $\delta$, et où le théorème 4.2.2.1 ne permet pas de conclure.

Enfin, nous calculons le polynôme de Bernstein de $\delta f^s$ lorsque $g, f \in \mathbf{C}[x_1, x_2, x_3]$ sont des polynômes homogènes de degré deux non proportionnels, et tels que $g$ définit un cône non dégénéré dans $\mathbf{C}^3$.

Signalons que T. Oaku a développé un algorithme de calcul des polynômes de Bernstein des sections d'un $\mathcal{D}$-module holonome, utilisant des méthodes de bases de Gröbner dans des algèbres d'opérateurs différentiels ([O]).

# Notations

• Si $\alpha \in \mathbf{N}^p$, $p \in \mathbf{N}^*$, est un multi-indice, nous noterons $|\alpha|$ sa longueur $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p$.

• Si $\mathcal{X}$ est une variété analytique complexe, $T^*\mathcal{X}$ désigne le fibré cotangent à $\mathcal{X}$.

Nous notons $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires sur $\mathcal{X}$ à coefficients holomorphes. Il est muni d'une filtration $\{\mathcal{D}_{\mathcal{X}}(k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ par le degré des opérateurs. Si $P \in \mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ est un opérateur, $\sigma(P) \in \operatorname{gr}\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ désignera son symbole principal et $\deg P$ son degré. Si $I \subset \mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ est un idéal à gauche, nous notons $\operatorname{gr} I \subset \operatorname{gr}\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$, l'idéal engendré par les symboles principaux des éléments de $I$.

De même, étant fixée une indéterminée $s$, nous considérons le faisceau d'anneaux $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}[s] = \mathcal{D}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[s]$, muni de la filtration par le degré total (l'indéterminée $s$ ayant le degré un).

Si $P, Q \in \mathcal{D}_{\mathcal{X}}[s]$, nous notons $[P, Q]$ l'opérateur $PQ - QP \in \mathcal{D}_{\mathcal{X}}[s]$.

Dans toute cette étude, par $\mathcal{D}$-module il faut entendre $\mathcal{D}$-module à gauche.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$-Module cohérent, nous notons $\operatorname{car}_{\mathcal{D}_{\mathcal{X}}} \mathcal{M} \subset T^*\mathcal{X}$ sa variété caractéristique. Lorsque il n'y a pas d'ambiguité, nous la noterons $\operatorname{car}(\mathcal{M})$. De façon analogue, $\operatorname{car}_{\mathcal{D}_{\mathcal{X}}[s]} \mathcal{M} \subset T^*\mathcal{X} \times \mathbf{C}$ désignera la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}[s]$-Module cohérent $\mathcal{M}$.

# Chapitre 1

# Vers le polynôme de Bernstein d'une fonction sur une intersection complète

Ce chapitre rassemble les résultats généraux sur lesquels s'appuient notre étude.

Nous donnons d'abord des généralités sur les polynômes de Bernstein associés aux sections d'un $\mathcal{D}$-Module holonome. Puis nous rappelons le théorème fondamental permettant le calcul algébrique des cycles évanescents. Suite à ces résultats, nous débutons l'étude des polynômes de Bernstein des sections du module de cohomologie locale algébrique à support une intersection complète, objets centraux de ce travail.

## 1.1 Polynôme de Bernstein pour une section d'un $\mathcal{D}$-Module holonome

### 1.1.1 Existence et premières propriétés

Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ un voisinage de l'origine.

Notons $\mathcal{O}_\Omega$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $\Omega$, $\mathcal{O}$ sa fibre à l'origine, et $\mathcal{D}_\Omega = \mathcal{O}_\Omega\langle \partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n\rangle$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires sur $\Omega$ à coefficients dans $\mathcal{O}_\Omega$, de fibre à l'origine $\mathcal{D}$. Etant fixée une indéterminée $s$, notons aussi $\mathcal{D}_\Omega[s]$ le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathcal{O}_\Omega[s]$.

Soit $f : \Omega \to \mathbf{C}$, une fonction holomorphe non constante, nulle à l'origine.

Etant donné un $\mathcal{O}_\Omega$-Module $\mathcal{F}$, posons $\mathcal{F}[1/f] = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_\Omega} \mathcal{O}_\Omega[1/f]$, le localisé de $\mathcal{F}$ par le système multiplicatif des puissances de $f$, et $\mathcal{F}[1/f, s] = \mathbf{C}[s] \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{F}[1/f]$.

Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_\Omega[1/f, s]$-Module libre de rang un muni d'un générateur noté $f^s$ (i.e. $\mathcal{L} = \mathcal{O}_\Omega[1/f, s]f^s$). Pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$, nous noterons $f^{s-k}$ la section $(1/f^k)f^s \in \mathcal{L}$.

Le faisceau $\mathcal{L}$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}_\Omega[s]$-Module à gauche, définie en coordonnées locales par :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(af^s) = \frac{\partial a}{\partial x_i} f^s + sa\frac{\partial f}{\partial x_i} f^{s-1}$$

pour toute section locale $a \in \mathcal{O}_\Omega[1/f, s]$.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_\Omega$-Module à gauche, $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\Omega} \mathcal{L}$ est de façon naturelle un $\mathcal{D}_\Omega[s]$-Module à gauche. Nous avons les isomorphismes naturels de $\mathcal{O}_\Omega[1/f, s]$-Modules :

$$\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\Omega} \mathcal{L} \cong \mathcal{M}[1/f, s] \otimes_{\mathcal{O}_\Omega} \mathcal{L} \cong \mathcal{M}[1/f, s]f^s$$

Pour toute section $u \in \mathcal{M}[1/f, s]$, nous noterons $uf^s$ la section $u \otimes f^s$.

Par la suite, ces notations seront utilisées à tout moment.

• Rappelons brièvement quelques résultats généraux de la théorie des $\mathcal{D}$-Modules (cf. [Gg.Ms] par exemple).

Le faisceau d'anneaux $\mathcal{D}_\Omega$ est cohérent. Il admet une filtration croissante $\{\mathcal{D}_\Omega(k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ par le degré des opérateurs. Etant donné un $\mathcal{D}_\Omega$-Module $\mathcal{M}$, une filtration de $\mathcal{M}$ croissante $\{\mathcal{M}_\ell\}_{\ell\in\mathbf{N}}$ telle que $\mathcal{M} = \bigcup_\ell \mathcal{M}_\ell$ et $\mathcal{D}_\Omega(k)\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{M}_{\ell+k}$ pour tout $k, \ell \in \mathbf{N}$, est dite *bonne* si les $\mathcal{M}_\ell$ sont des $\mathcal{O}_\Omega$-Modules cohérents et si localement, il existe $\ell_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{D}_\Omega(k)\mathcal{M}_{\ell_0} = \mathcal{M}_{\ell_0+k}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Un $\mathcal{D}_\Omega$-Module $\mathcal{M}$ est cohérent si et seulement si il admet une bonne filtration. Le gradué d'une bonne filtration d'un $\mathcal{D}_\Omega$-Module cohérent $\mathcal{M}$ est un $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_\Omega$-Module cohérent.

La *variété caractéristique* d'un $\mathcal{D}_\Omega$-Module cohérent $\mathcal{M}$, notée $\mathrm{car}_{\mathcal{D}_\Omega}\mathcal{M}$, est le sous-espace analytique de $T^*\Omega$ définit localement par la racine de l'annulateur dans $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_\Omega$ du gradué d'une bonne filtration locale de $\mathcal{M}$. Pour tout $\mathcal{D}_\Omega$-Module cohérent $\mathcal{M}$ non nul, la dimension de sa variété caractéristique est supérieure ou égale à $n$ (inégalité de Bernstein).

Un $\mathcal{D}_\Omega$-Module est dit *holonome* si c'est un $\mathcal{D}_\Omega$-Module cohérent non nul dont la variété caractéristique est de dimension minimale, ou bien s'il est nul. La variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome non nul est une réunion d'espaces conormaux à des sous-espaces analytiques irréductibles de $\Omega$.

• Donnons maintenant l'énoncé du résultat de M. Kashiwara à la base de notre étude.

THÉORÈME 1.1.1.1 ([K2]) *Soient* $f : \Omega \to \mathbf{C}$ *une fonction holomorphe définie sur un voisinage de l'origine* $\Omega \subset \mathbf{C}^n$*, non constante, nulle en* 0*, et* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{D}_\Omega$*-Module à gauche holonome. Soit* $m$ *une section locale de* $\mathcal{M}$*. Localement au voisinage de tout point où* $m$ *est définie, il existe une équation fonctionnelle dans* $\mathcal{M}[1/f, s]f^s$ *:*

$$b(s)mf^s = Pmf^{s+1} \tag{1}$$

*où* $b(s) \in \mathbf{C}[s]$ *est un polynôme non nul et* $P \in \mathcal{D}_\Omega[s]$*.*

DÉFINITION 1.1.1.2 *Avec les notations du théorème précédent, pour toute section* $m \in \mathcal{M}$ *n'appartenant à la* $f$*-torsion de* $\mathcal{M}$*, on appelle* polynôme de Bernstein à l'origine *de* $mf^s$ *le polynôme* $b(s) \in \mathbf{C}[s]$ *unitaire, non nul de plus bas degré, réalisant l'équation fonctionnelle* (1) *au niveau des germes à l'origine. On le note* $b(mf^s, s)$*.*

Lorsque $\mathcal{M} = \mathbf{C}[x]$, $m = 1$ et $f$ est polynomiale, nous retrouvons bien sûr le résultat de I.N. Bernstein à l'origine de la théorie ([Bn]).

### Premières propriétés

Soient $f : \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe définie sur un voisinage de l'origine $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, non constante, nulle en 0, et $\mathcal{M}$ la fibre à l'origine d'un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome.

Nous donnons ici quelques résultats élémentaires sur le polynôme de Bernstein de $mf^s$, $m \in \mathcal{M}$.

Notons $\mathcal{M}f^0$ l'image de $\mathcal{M}$ par le morphisme $\mathcal{D}$-linéaire naturel de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}[1/f]$. Pour tout $m \in \mathcal{M}$, nous noterons $mf^0 \in \mathcal{M}f^0$ l'élément associé. Dire que $m \in \mathcal{M}$ est un élément de $f$-torsion revient à dire que $mf^0$ est nul. Enfin, lorsque $\mathcal{M}$ n'a pas de $f$-torsion, nous pouvons identifier à $\mathcal{M}$ le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}f^0$.

LEMME 1.1.1.3 *Supposons que* $\bigcap_{i\in\mathbf{N}} f^i\mathcal{M}f^0$ *soit réduit à zéro. Soit* $m \in \mathcal{M}$*, un germe n'appartenant pas à la* $f$*-torsion de* $\mathcal{M}$*. Soit* $r \in \mathbf{N}$*, le plus grand entier tel que* $mf^0 \in f^r\mathcal{M}f^0$*. Alors* $(s+r+1)$ *divise* $b(mf^s, s)$*.*

*Preuve.* Par hypothèses, $mf^0 = f^r m' f^0$ avec $m'f^0 \in \mathcal{M}f^0 - f\mathcal{M}f^0$. Considérons une équation fonctionnelle réalisant le polynôme de Bernstein de $mf^s$

$$b(mf^s, s)m'f^{s+r} = Pm'f^{s+r+1} \tag{2}$$

où $P \in \mathcal{D}[s]$. Soit $R \in \mathcal{D}$, le reste de la division euclidienne de l'opérateur$P$ par $(s+r+1)$. Nous avons donc l'identité dans $\mathcal{M}[1/f,s]f^s$ suivante :

$$Rm'f^{s+r+1} = R(m')f^{s+r+1} + (s+r+1)cf^s$$

avec $c \in \mathcal{M}[1/f,s]$. L'équation (2) implique alors que $b(mf^s,-r-1)m'f^0 = R(m')f$ dans $\mathcal{M}f^0$. Comme $m'f^0 \notin f\mathcal{M}f^0$, $b(mf^s,-r-1)$ est nécessairement nul, comme souhaité.

L'hypothèse faite sur $\mathcal{M}f^0$ revient à supposer que $\mathcal{M}f^0$ ne contient aucun sous-module non nul localisé par rapport aux puissances de $f$. Introduisons une notation.

Notation

Supposons que $\bigcap_{i\in\mathbf{N}} f^i\mathcal{M}f^0 = \{0\}$. Soit $m \in \mathcal{M}$ un germe n'appartenant pas à la $f$-torsion de $\mathcal{M}$. Si $r \in \mathbf{N}$ est le plus grand entier tel que $mf^0 \in f^r\mathcal{M}f^0$, nous noterons $\tilde{b}(mf^s,s) \in \mathbf{C}[s]$, le quotient de la division euclidienne de $b(mf^s,s)$ par $(s+r+1)$.

Lemme 1.1.1.4 *Soient $u_1$, $u_2 \in \mathcal{O}$, deux unités. Alors, pour tout $m \in \mathcal{M}$ n'appartenant pas à la $f$-torsion de $\mathcal{M}$, $b(u_1m(u_2f)^s,s) = b(mf^s,s)$.*

*Preuve.* Il suffit d'établir que pour tout couple d'unités $(u_1,u_2) \in \mathcal{O}^2$ et tout $m \in \mathcal{M}$ non nul, $b(mf^s,s)$ divise $b(u_1m(u_2f)^s,s)$, puis appliquer ce résultat à $m' = u_1m$, $f' = u_2f$ et $u_i' = u_i^{-1}$ pour $i \in \{1,2\}$. Soit $P \in \mathcal{D}[s]$, un opérateur réalisant le polynôme de Bernstein de $u_1m(u_2f)^s$. Notons $\widetilde{P} \in \mathcal{D}[s]$, l'image de l'opérateur $Pu_1u_2$ par l'automorphisme d'anneau $Q \mapsto u_2^{-s}Qu_2^s$, $Q \in \mathcal{D}[s]$. Alors $b(u_1m(u_2f)^s,s) - u_1^{-1}\widetilde{P}f$ annule $mf^s$, i.e. $b(mf^s,s)$ divise $b(u_1m(u_2f)^s,s)$, comme souhaité.

Lemme 1.1.1.5 *Soient $m \in \mathcal{M}$ et $P(s) \in \mathcal{D}[s]$, un opérateur différentiel tel que $P(j)mf^j \in \mathcal{M}[1/f]$ est nul pour une infinité d'entiers $j \in \mathbf{Z}$. Alors $P(s)$ appartient à l'annulateur dans $\mathcal{D}[s]$ de $mf^s \in \mathcal{M}[1/f,s]f^s$, noté $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}[s]}\, mf^s$.*

*Preuve.* Nous avons dans $\mathcal{M}[1/f,s]f^s$ l'identité suivante :

$$P(s)mf^s = (\sum_{i=0}^{d} m_is^i)f^{s-N} \tag{3}$$

où les $m_i$ appartiennent à $\mathcal{M}$ et $N$ est le degré de l'opérateur $P$. Par hypothèse, il existe des entiers deux-à-deux distincts $j_0,\dots,j_d \in \mathbf{Z}$ tels que, pour tout $k=0,\dots,d$, l'élément $\sum_{i=0}^{d}(j_k)^i m_i f^{j_k-N}\in\mathcal{M}[1/f]$ est nul, c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{d}(j_k)^i m_i f^0 = 0$$

dans $\mathcal{M}f^0$. La matrice de Gram construite à partir des entiers $j_0,\dots,j_d$, étant inversible, ces égalités pour $k=0,\dots,d$, impliquent que $m_i f^0$ est nul pour $i=0,\dots,d$. Ainsi, d'après l'équation (3), l'opérateur $P(s)$ annule bien $mf^s$.

Lemme 1.1.1.6 *Soit $m\in\mathcal{M}$, un élément qui ne soit pas de $f$-torsion. Alors, pour tout $h$ appartenant à l'annulateur dans $\mathcal{O}$ de $mf^0$, noté $\operatorname{Ann}_{\mathcal{O}} mf^0$, $b(mf^s,s)=b(m(f+h)^s,s)$.*

*Preuve.* Il suffit d'établir que pour tout $h\in\operatorname{Ann}_{\mathcal{O}} mf^0$, $b(m(f+h)^s,s)$ est un multiple de $b(mf^s,s)$, puis appliquer ce résultat à $f'=f+h$, $h'=-h$. Soit $P(s)\in\mathcal{D}[s]$ un opérateur réalisant l'équation fonctionnelle de $m(f+h)^s$. Alors $R(s)=b(m(f+h)^s,s)-P(s)f$ appartient à $\operatorname{Ann}_{\mathcal{D}[s]} m(f+h)^s$. Or $m(f+h)^j=mf^j$ pour tout $j\in\mathbf{N}$. D'après le lemme 1.1.1.5, $R(s)$ annule donc $mf^s$ i.e. $b(m(f+h)^s,s)mf^s=P(s)mf^{s+1}$. Ainsi, $b(mf^s,s)$ divise $b(m(f+h)^s,s)$, comme souhaité.

Remarquons qu'en fait, sous les mêmes hypothèses et avec les mêmes notations, une preuve analogue établit qu'il y a un isomorphisme $\mathcal{D}[s]$-linéaire naturel de $\mathcal{D}[s]mf^s$ dans $\mathcal{D}[s]m(f+h)^s$.

Lemme 1.1.1.7 *Soit $\mathcal{X}\subset\Omega$, une sous-variété analytique de codimension $p$ contenant l'origine. Notons $i:\mathcal{X}\hookrightarrow\Omega$, l'inclusion et $h_1,\dots,h_p$, des équations locales de $i(\mathcal{X})$. Soit $\mathcal{M}'$, un $\mathcal{D}_{\mathcal{X},0}$-module holonome. Supposons que $f$ soit non identiquement nulle sur $i(\mathcal{X})$. Alors, pour tout $m\in\mathcal{M}'$ n'appartenant pas à la $(f\circ i)$-torsion de $\mathcal{M}'$, $b(m(f\circ i)^s,s)=b(i_+(m)f^s,s)$, où $i_+(m)$ est l'élément $m\otimes\dot{1}/h_1\cdots h_p$ du $\mathcal{D}$-module holonome $\mathcal{M}'\otimes(\mathcal{O}[1/h_1\cdots h_p]/\sum_{i=1}^{p}\mathcal{O}[1/h_1\cdots\check{h}_i\cdots h_p])$.*

*Preuve.* Prenons un système de coordonnées locales $x_1,\dots,x_n$, dans lequel $h_i=x_i$, $i=1,\dots,p$. Alors $f=\tilde{f}+h$ avec $h\in(x_1,\dots,x_p)\mathcal{O}$ et $\tilde{f}$ ne dépendant que de $x_{p+1},\dots,x_n$. Grâce au lemme 1.1.1.6, nous avons donc $b(i_+(m)f^s,s)=b(i_+(m)\tilde{f}^s,s)$. Il reste donc à remarquer que $b(i_+(m)\tilde{f}^s,s)$ coïncide avec $b(m\tilde{f}^s,s)$.

En utilisant une équation fonctionnelle dans $\mathcal{M}'[1/\tilde{f},s]\tilde{f}^s$ réalisant le polynôme de Bernstein de $\tilde{f}$ associé à $m$, on constate aisément que $b(i_+(m)\tilde{f}^s,s)$ divise $b(m\tilde{f}^s,s)$. D'autre part, considérons l'équation fonctionnelle suivante

$$b(i_+(m)\tilde{f}^s,s)i_+(m)\tilde{f}^s = P.i_+(m)\tilde{f}^{s+1} \tag{4}$$

où $P \in \mathcal{D}[s]$. Après division euclidienne par $x_1,\ldots,x_p$, des coefficients de l'opérateur $P$ dans son écriture avec coefficients à droite, il s'écrit $P = \sum_{i=1}^p Q_i x_i + R$ où $Q_i \in \mathcal{D}[s]$ et $R \in \mathcal{D}[s]$ est indépendant de $x_1,\ldots,x_p$. Sans perte de généralité, nous pouvons donc supposer que dans l'identité (4), l'opérateur $P$ appartient à $\mathbf{C}\{x_{p+1},\ldots,x_n\}\langle\partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_n\rangle[s]$.

Soit alors $\widetilde{P} \in \mathcal{D}_{\mathcal{X},0}[s]$, le terme constant de $P$ vu comme opérateur en $(\partial/\partial x_1),\ldots,(\partial/\partial x_p)$ à coefficients dans $\mathcal{D}_{\mathcal{X},0}[s]$. Il est manifeste que l'on peut remplacer $P$ par $\widetilde{P}$ dans l'identité (4). Comme enfin l'annulateur dans $\mathcal{D}_{\mathcal{X},0}[s]$ de $i_+(m)\tilde{f}^s$ coïncide avec celui de $m\tilde{f}^s$, nous en déduisons alors que $b(i_+(m)\tilde{f}^s,s)$ est un multiple de $b(m\tilde{f}^s,s)$.

En conséquence, $b(i_+(m)\tilde{f}^s,s)$ est bien égal à $b(m\tilde{f}^s,s)$.

LEMME 1.1.1.8 *Soit $z$ une indéterminée. Posons $\mathcal{D}\{z\} = \mathbf{C}\{\underline{x},z\}\langle\partial/\partial x_1,\ldots \partial/\partial x_n\rangle$ et notons $\mathcal{M}\{z\}$ le $\mathcal{D}\{z\}\langle\partial/\partial z\rangle$-module holonome $\mathcal{M}\otimes_{\mathbf{C}\{x\}}\mathbf{C}\{x,z\}$. Alors, pour tout élément $m \in \mathcal{M}$ n'appartenant pas à la $f$-torsion de $\mathcal{M}$, $b(mf^s,s) = b((\dot{m/(z-f)})z^s,s)$, où $\dot{m/(z-f)} \in \mathcal{M}\{z\}[1/z-f]/\mathcal{M}\{z\}$ désigne la classe de $m/(z-f)$.*

*Preuve.* Grâce au lemme 1.1.1.6, $b((\dot{m/(z-f)})z^s,s)$ coïncide avec le polynôme de Bernstein de $(\dot{m/\tilde{z}})f^s \in (\mathcal{M}\{\tilde{z}\}[1/\tilde{z}]/\mathcal{M}\{\tilde{z}\})[1/f,s]f^s$ (en faisant le changement de coordonnées $\tilde{z} = z-f$). D'autre part, en procédant comme dans la preuve du lemme précédent, on établit que les polynômes $b((\dot{m/\tilde{z}})f^s,s)$ et $b(mf^s,s)$ sont égaux. D'où l'assertion.

### 1.1.2 Résultats généraux sur les sections $mf^s$

Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ un voisinage de l'origine. Nous noterons $\mathcal{O}_\Omega$ (resp. $\mathcal{D}_\Omega$) le faisceau des fonctions holomorphes (resp. opérateurs différentiels) sur $\Omega$, de fibre à l'origine $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{D}$).

Soient $f : \Omega \to \mathbf{C}$, une fonction holomorphe non constante, nulle en 0, et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome.

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques résultats relatifs aux sections $mf^s$, $m \in \mathcal{M}$, du $\mathcal{D}[s]$-Module $\mathcal{M}[1/f,s]f^s$. Nous rappelons d'abord des résultats sur la cohérence et la variété caractéristique de $\mathcal{D}_\Omega m f^s$. Puis nous faisons un bilan de ce que l'on peut dire sur les annulateurs des germes $mf^{-\ell} \in \mathcal{M}_0[1/f]$, $\ell \in \mathbf{N}^*$.

**Cohérence et variété caractéristique de $\mathcal{D}[s]mf^s$**

• Le $\mathcal{D}_\Omega$-Module $\mathcal{M}$ étant holonome, la variété caractéristique de $\mathcal{D}_\Omega m$ est réunion d'espaces conormaux à des sous-espaces analytiques irréductibles $X_\alpha$ de $\Omega$ :

$$\mathrm{car}(\mathcal{D}_\Omega m) = \cup_\alpha T^*_{X_\alpha}\Omega \ .$$

Comme au paragraphe précédent, considérons le sous $\mathcal{D}_\Omega$-Module $\mathcal{D}_\Omega m f^s \subset \mathcal{D}_\Omega m[1/f, s]f^s$. Montrons le lemme suivant :

LEMME 1.1.2.1 *Soient $f : \Omega \to \mathbf{C}$, une fonction analytique non nulle, et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_\Omega$-Module cohérent. Pour toute section locale $m \in \mathcal{M}$, le $\mathcal{D}_\Omega$-Module à gauche engendré par $mf^s$ est cohérent.*

*Preuve.* Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, nous avons $\mathcal{D}_\Omega(k)mf^s = M(k)f^{s-k}$, où $M(k)$ est un sous $\mathcal{O}_\Omega$-Module de type fini du $\mathcal{O}_\Omega$-Module cohérent $\bigoplus_{i=0}^k \mathcal{D}_\Omega(i)ms^i$. Ainsi, $M(k)$ est $\mathcal{O}_\Omega$-cohérent, et $\mathcal{D}_\Omega(k)mf^s$ l'est aussi comme quotient d'un $\mathcal{O}_\Omega$-Module cohérent par ses éléments de $f$-torsion ([Gg.Ms, lem. 1, p. 117]). La filtration de $\mathcal{D}_\Omega$ par l'ordre des opérateurs induit donc une bonne filtration de $\mathcal{D}_\Omega m f^s$. D'où le résultat (cf. [Gg.Ms, cor. 1, p. 121]).

REMARQUE 1.1.2.2 Sous les mêmes hypothèses, la même preuve établit la $\mathcal{D}_\Omega[s]$-cohérence de $\mathcal{D}_\Omega[s]mf^s$, en utilisant cette fois la filtration par l'ordre total de $\mathcal{D}_\Omega[s]$.

• Rappelons la définition d'un module holonome régulier donnée par Z. Mebkhout (cf. [Mb5, p. 135]). Soit $Y \subset \Omega$, un sous-espace analytique fermé défini par un idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_\Omega$. Rappelons que le complété formel de $\mathcal{O}_\Omega$ le long de $Y$ :

$$\mathcal{O}_{\widehat{\Omega|Y}} = \varprojlim_k \mathcal{O}_\Omega/\mathcal{J}^k$$

a une structure naturelle de $\mathcal{D}_\Omega$-Module à gauche. Le morphisme $\mathcal{D}_\Omega$-linéaire injectif naturel de $\mathcal{O}_{\Omega|Y}$ dans $\mathcal{O}_{\widehat{\Omega|Y}}$ induit alors le morphisme :

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_\Omega}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\Omega|Y}) \longrightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_\Omega}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\widehat{\Omega|Y}}) \qquad (5)$$

de la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels sur $\Omega$, $\mathcal{M}$ étant un complexe borné de $\mathcal{D}_\Omega$-Modules à cohomologie holonome. Le cône de ce morphisme est le *complexe d'irrégularité de $\mathcal{M}$ le long de $Y$*. Précisons que quand $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome et $Y$ une hypersurface, le théorème de positivité de l'irrégularité de Z. Mebkhout affirme que c'est alors un faisceau pervers ([Mb4], [Mb7]).

DÉFINITION 1.1.2.3 *Un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome $\mathcal{M}$ est* régulier *si, pour tout sous-espace analytique $Y \subset \Omega$, le morphisme* (5) *est un isomorphisme.*

• Lorsque $\mathcal{M}$ est régulier, on sait exprimer la variété caractéristique de $\mathcal{D}_\Omega[s]mf^s$ en fonction de celle $\mathcal{D}_\Omega m$.

THÉORÈME 1.1.2.4 ([GN], TH. 2.3, P. 346) *Soient $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, un voisinage de l'origine, et $f : \Omega \to \mathbf{C}$, une fonction holomorphe non constante, nulle en* 0. *Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome régulier, et $m \in \mathcal{M}$, une section locale non nulle.*

*Si* $\operatorname{car}(\mathcal{D}_\Omega m) = \cup_\alpha T^*_{X_\alpha}\Omega$, *la variété caractéristique du $\mathcal{D}_\Omega[s]$-Module $\mathcal{D}_\Omega[s]mf^s$ est l'espace :*

$$\operatorname{car}_{\mathcal{D}_\Omega[s]} \mathcal{D}_\Omega[s]mf^s = \bigcup_{f(X_\alpha)\neq 0} W^\sharp_{f|X_\alpha} \subset T^*\Omega \times \mathbf{C}$$

*où $W^\sharp_{f|X_\alpha}$ désigne l'adhérence dans $T^*\Omega \times \mathbf{C}$ de l'ensemble :*

$$\{(x, \xi + \lambda \mathrm{d}f(x), \lambda f(x)) \mid (x,\xi) \in T^*_{X_\alpha}\Omega,\ \lambda \in \mathbf{C}\}\ .$$

La preuve donnée par V. Ginsburg reprend celle de M. Kashiwara ([K1]), qui traite le cas particulier $\mathcal{M} = \mathcal{O}_\Omega$. Elle utilise les résultats de base sur les modules holonomes réguliers, et pas les conséquences algébriques 'fortes' de la régularité données par M. Kashiwara.

Signalons que ce résultat peut aussi être obtenu à partir d'un théorème de C. Sabbah (cf. [Sb3, th. 3.2, p. 228], [B.B.M.M]).

V. Ginsburg montre aussi le résultat suivant :

PROPOSITION 1.1.2.5 ([GN], PROP. 2.14.4, P. 351) *Sous les hypothèses du théorème précédent, le $\mathcal{D}_\Omega$-Module $\mathcal{D}_\Omega[s]mf^s$ est $\mathcal{D}_\Omega$-cohérent. Sa variété caractéristique comme $\mathcal{D}_\Omega$-Module est l'espace :*

$$\operatorname{car}_{\mathcal{D}_\Omega} \mathcal{D}_\Omega[s]mf^s = \bigcup_{f(X_\alpha)\neq 0} W_{f|X_\alpha} \subset T^*\Omega$$

*où $W_{f|X_\alpha}$ désigne l'espace conormal relatif à la restriction de $f$ à $X_\alpha$, adhérence dans $T^*\Omega$ de l'ensemble :*

$$\{(x, \xi + \lambda \mathrm{d}f(x)) \mid (x,\xi) \in T^*_{X_\alpha}\Omega,\ \lambda \in \mathbf{C}\}\ .$$

*On le note aussi $T^*_{f|X_\alpha}\Omega$.*

Remarque 1.1.2.6 En particulier, il existe un opérateur $P(s) \in \mathcal{D}[s]$, unitaire en $s$, qui annule $mf^s$. Le $\mathcal{D}_\Omega$-Module $\mathcal{D}_\Omega[s]mf^s$ est donc isomorphe à une somme directe finie d'exemplaires de $\mathcal{D}_\Omega mf^s$. En conséquence, avec les notations précédentes, la variété caractéristique de $\mathcal{D}_\Omega mf^s$ est :

$$\operatorname{car} \mathcal{D}_\Omega mf^s = \bigcup_{f(X_\alpha)\neq 0} W_{f|X_\alpha} \subset T^*\Omega$$

Rappelons une définition.

Définition 1.1.2.7 *Un élément de $\mathcal{D}[s]$ est un* bon opérateur en $s$ *de degré $N \geq 1$ s'il s'écrit :*

$$s^N + A_1 s^{N-1} + \cdots + A_N \ ,$$

*où $A_i$ est un opérateur de $\mathcal{D}$ de degré au plus $i$, pour $i = 1, \ldots, N$.*

• Nous souhaitons établir l'existence d'un bon opérateur en $s$ qui annule $mf^s$. Quand $\mathcal{M} = \mathcal{O}$ et $m = 1$, cela fut montré dans [K1].

Cela va résulter du fait suivant, également présent dans [Gn], dont nous donnons ici une preuve plus directe.

Lemme 1.1.2.8 *Soient $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, un voisinage de l'origine, et $f : \Omega \to \mathbf{C}$, une fonction holomorphe non constante, nulle en $0$. Soit $\{X_\alpha\}_\alpha$ une collection finie de sous-ensembles analytiques irréductibles de $\Omega$ non contenus dans $f^{-1}(0)$.*

*La projection canonique de $T^*\Omega \times \mathbf{C}$ sur $T^*\Omega$ induit un morphisme fini $\pi' : \cup_\alpha W^\sharp_{f|X_\alpha} \to \cup_\alpha W_{f|X_\alpha}$.*

*Preuve.* Constatons que le morphisme $\pi'$ est à fibres coniques. Il suffit donc d'établir que ${\pi'}^{-1}(0,0) = (0,0,0)$.

Soit $w(t) = (\gamma(t), \xi(t) + s(t)\mathrm{d}(f(\gamma(t)))/f(\gamma(t)), s(t)) : \Theta^* \to \cup_\alpha W^\sharp_{f|X_\alpha}$, un petit chemin analytique défini sur un voisinage épointé de l'origine $\Theta^* \subset \mathbf{C}^*$, admettant pour limite $(0,0,\tau)$ lorsque $t$ tend vers 0 et tel que $f(\gamma(t)) \neq 0$ pour $t \neq 0$. Montrons que $\tau$ est nul. Par hypothèse sur $w$, la fonction sur $\Theta^*$ définie par $t \mapsto c(t) = \langle \xi(t) + s(t)\mathrm{d}(f(\gamma(t)))/f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$ tend vers 0 lorsque $t$ tend vers 0. Quitte à restreindre $\Theta^*$, nous pouvons supposer que, pour tout $t \in \Theta^*$, $(\gamma(t), \xi(t))$ appartient à $T^*_{X_\alpha}\Omega$ pour le même $\alpha$. Ainsi, pour tout $t \in \Theta^*$, $c(t) = s(t)(f\circ\gamma)'(t)/(f\circ\gamma)(t)$. Or, puisque $f(0) = 0$, nous avons $\mathrm{ord}_t(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{ord}_t(f\circ\gamma)(t) - 1$. En conséquence, $\tau = \lim_{t\to 0} s(t)$ est nécessairement nul, comme souhaité.

COROLLAIRE 1.1.2.9 *Soient $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, un voisinage de l'origine, et $f : \Omega \to \mathbf{C}$, une fonction holomorphe non constante, nulle en 0. Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome régulier, et $m \in \mathcal{M}$, une section locale non nulle. Il existe un bon opérateur en $s$ qui annule $mf^s$.*

*Preuve.* Reprenons les notations du théorème 1.1.2.4. D'après le lemme précédent, le comorphisme d'anneaux $\pi'^*$ est un morphisme fini, donc entier (cf. [Lf, p. 136]). Il existe donc un polynôme $R \in \mathcal{O}[\xi, s]$, unitaire en $s$, qui s'annule sur $\mathrm{car}_{\mathcal{D}[s]} \mathcal{D}[s]mf^s$. Cet espace étant conique, nous pouvons supposer de plus que $R$ est homogène en $(\xi, s)$. Par suite, il existe un opérateur $P \in \mathcal{D}[s]$ qui annule $mf^s$ et dont le symbole total est une puissance de $R$. D'où l'existence du bon opérateur en $s$ annoncée.

### Résultats sur l'annulateur de $mf^{-\ell}$, $\ell \in \mathbf{N}^*$

Donnons tout d'abord un résultat général.

PROPOSITION 1.1.2.10 *Soient $m \in \mathcal{M}_0$, un élément qui ne soit pas de $f$-torsion, et $\ell \in \mathbf{N}^*$, un entier naturel non nul. Notons $b(s) \in \mathbf{C}[s]$, le polynôme de Bernstein de $mf^s$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La plus petite racine entière de $b(s)$ est supérieure ou égale à $-\ell$.*
2. *Le morphisme $\mathcal{D}$-linéaire :*
$$ev_\ell : \frac{\mathcal{D}[s]mf^s}{(s+\ell)\mathcal{D}[s]mf^s} \longrightarrow \mathcal{D}m[1/f]$$
$$\dot{P(s)mf^s} \mapsto P(-\ell)mf^{-\ell}$$
*est un isomorphisme.*
3. *Le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{D}m[1/f]$ est engendré par $mf^{-\ell}$.*
4. *Le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{D}m[1/f]/\mathcal{D}m$ est engendré $\dot{m}f^{-\ell}$.*

*Preuve.* • Montrons que *1* implique *2*. C'est un résultat de M. Kashiwara ([K1, prop. 6.2, p. 52]) étendu au cas des sections d'un $\mathcal{D}$-module holonome ([Bj, prop. 6.1.18, p. 258-259]).

Etablissons d'abord la surjectivité de $ev_\ell$. Il suffit de montrer que pour tout opérateur $P \in \mathcal{D}$ et tout entier négatif $l$, $(P.m)f^l \in \mathcal{D}mf^{-\ell}$. En itérant les relations :
$$(\frac{\partial}{\partial x_i}Qm)f^l = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}f - l\frac{\partial f}{\partial x_i}\right](Qm)f^{l-1}$$

où $i = 1, \ldots, n$, $Q \in \mathcal{D}$ et $l \in \mathbf{Z}$, on établit que pour tout $P \in \mathcal{D}$, $l \in \mathbf{Z}$, il existe $Q \in \mathcal{D}$ et $k \in \mathbf{Z}$ tels que $(Pm)f^l = Qmf^k$. Ainsi, nous sommes ramenés à montrer que $mf^k \in \mathcal{D}mf^{-\ell}$ pour tout $k < -\ell$.

Soit $R \in \mathcal{D}[s]$, un opérateur différentiel réalisant le polynôme de Bernstein de $mf^s$ :

$$b(s)mf^s = Rmf^{s+1} \ . \tag{6}$$

Soit $k \in \mathbf{Z}$, un entier strictement inférieur à $-\ell$. En itérant (6), nous obtenons dans $\mathcal{D}m[1/f, s]f^s$ l'identité suivante :

$$\underbrace{b(s-\ell-k-1)\cdots b(s+1)b(s)}_{c(s)} mf^s = Q(s)mf^{s-\ell-k} \tag{7}$$

où $Q \in \mathcal{D}[s]$. Constatons alors que, grâce à l'hypothèse faite sur $\ell$, $c(k)$ est non nul. Par substitution de $k$ à $s$ dans (7), il vient $mf^k \in \mathcal{D}mf^{-\ell}$, comme souhaité.

Montrons l'injectivité de $ev_\ell$. Soit $P(s) \in \mathcal{D}[s]$. Nous avons l'identité suivante dans $\mathcal{D}m[1/f, s]f^s$ :

$$P(s)mf^s = (Q(s)m)f^{s-l}$$

où $Q(s) \in \mathcal{D}[s]$ et $l$ est le degré de $P$. Supposons que $P(s)mf^s$ appartient à $\ker ev_\ell$. Il existe alors un entier $j \in \mathbf{N}$ tel que $f^jQ(-\ell)$ annule $m \in \mathcal{M}$. Par suite, $P(s)mf^s = (s+\ell)(Q'm)f^{s-l}$, où $Q' \in \mathcal{D}[s]$ est le quotient de la division euclidienne de $Q$ par $(s+\ell)$. En procédant comme plus haut, nous en déduisons que $P(s)mf^s = (s+\ell)\widetilde{Q}mf^{s-k}$ où $\widetilde{Q} \in \mathcal{D}[s]$ et $k \in \mathbf{N}^*$. En utilisant (6), il vient :

$$\underbrace{b(s-1)\cdots b(s-k+1)b(s-k)}_{d(s)} P(s)mf^s = (s+\ell)\widetilde{Q}Smf^s \ .$$

où $S \in \mathcal{D}[s]$. Par division euclidienne de $d(s)$ par $(s+\ell)$, il vient alors :

$$d(-\ell)P(s)mf^s = (s+\ell)(\widetilde{Q}S + e(s)P(s))mf^s$$

où $e(s) \in \mathbf{C}[s]$. Remarquons qu'avec notre hypothèse sur l'entier $\ell$, $d(-\ell)$ n'est pas nul. Par suite, $P(s)mf^s \in (s+\ell)\mathcal{D}[s]mf^s$, ce qui établit l'injectivité du morphisme $ev_\ell$. Ainsi, sous la condition *1*, $ev_\ell$ est bien un isomorphisme.

• Remarquons que l'implication *2* $\Rightarrow$ *3* et l'équivalence *3* $\Leftrightarrow$ *4* sont manifestes.

• Montrons l'implication *3* $\Rightarrow$ *1*. La preuve suivante reprend les idées de [Bj, prop. 6.3.15 & 6.3.16, p. 267-268].

Notons $k \in \mathbf{Z}$ la plus petite racine entière de $b(s)$. Supposons que $-\ell > k$. Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{D}[s]mf^{s+1} & \hookrightarrow & \mathcal{D}[s]mf^{s} & \twoheadrightarrow & \mathcal{D}[s]mf^{s}/\mathcal{D}[s]mf^{s+1} \to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow v \\
0 & \to & \mathcal{D}[s]mf^{s+1} & \hookrightarrow & \mathcal{D}[s]mf^{s} & \twoheadrightarrow & \mathcal{D}[s]mf^{s}/\mathcal{D}[s]mf^{s+1} \to 0 \\
 & & \downarrow u & & \downarrow & & \\
 & & \mathcal{D}mf^{k+1} & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathcal{D}mf^{k} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
\end{array}
$$

où $v$ désigne la multiplication par $(s-k)$. Remarquons que la seconde colonne est exacte (car *1* $\Rightarrow$ *2*), que $u$ est surjective, et que l'inclusion $i$ est un isomorphisme, puisque $mf^{-\ell} \in \mathcal{D}mf^{k+1}$ engendre $\mathcal{D}m[1/f]$ par hypothèse.

Une chasse dans le diagramme établit la surjectivité de $v$. Remarquons alors que le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{D}[s]mf^s/\mathcal{D}[s]mf^{s+1}$ est artinien, étant la fibre à l'origine d'un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome [c'est le quotient de deux $\mathcal{D}$-Modules sous-holonomes isomorphes (voir [K1], [K2])]. Comme un endomorphisme surjectif d'un module artinien est aussi injectif, $v$ est injectif. Ce qui est en contradiction avec le fait que $k$ soit une racine de $b(s)$.

Ainsi, $-\ell$ est inférieur ou égal à la plus petite racine entière du polynôme de Bernstein de $mf^s$.

Ce qui achève la preuve de la proposition.

REMARQUE 1.1.2.11 Notons $I_\ell \subset \mathcal{D}$, l'image de l'annulateur dans $\mathcal{D}[s]$ de $mf^s$ par le morphisme $\mathcal{D}$-linéaire de substitution de $-\ell$ à $s$. Etudions le diagramme commutatif suivant :

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}/I_\ell & \twoheadrightarrow & \mathcal{D}/\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, mf^{-\ell} \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
\dfrac{\mathcal{D}[s]mf^s}{(s+\ell)\mathcal{D}[s]mf^s} & \twoheadrightarrow & \mathcal{D}mf^{-\ell}
\end{array}
$$

où le morphisme de la seconde ligne est induit par $ev_\ell$. L'injectivité du morphisme $ev_\ell$ est donc équivalente à l'égalité entre $I_\ell$ et $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, mf^{-\ell}$.

Précisons maintenant les conditions de cette proposition dans un cas particulier.

LEMME 1.1.2.12 *Reprenons les hypothèses de la proposition 1.1.2.10 et supposons de plus qu'il existe un bon opérateur en s de degré un, $H(s) \in \mathcal{D}[s]$, qui annule $mf^s$. Alors, les conditions 1 à 4 sont équivalentes à celle ci-dessous :*

5. *L'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $mf^{-\ell}$ est engendré par $H(-\ell)$ et les éléments de $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, mf^s$.*

*et impliquent que :*

6. *L'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $m\dot{f}^{-\ell} \in \mathcal{D}m[1/f]/\mathcal{D}m$ est engendré par $f^\ell$, $H(-\ell)$ et les éléments de $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, mf^s$.*

*Enfin, supposons de plus que l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $mf^0 = m \otimes 1 \in \mathcal{M}[1/f]$ soit engendré par des opérateurs de degré au plus un. Alors, la condition 6 est équivalente aux conditions 1 à 5.*

*Preuve.* Constatons que $I_\ell$ est l'idéal proposé à la condition *5*, puisque nous avons l'identité $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}[s]}\, mf^s = \mathcal{D}[s]H(s) + \mathcal{D}[s]\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, mf^s$. De plus, pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$ :

$$H(k)mf^s = (k-s)mf^s \; . \tag{8}$$

• L'implication *2* $\Rightarrow$ *5* résulte directement de la remarque 1.1.2.11.

• Montrons que *5* implique *1*. Supposons que $b(s)$ ait au moins une racine entière strictement inférieure à $-\ell$. Notons $k \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$, la plus grande racine entière de $b(s)$ strictement inférieure à $-\ell$. Reprenons l'identité (6). Quitte à diviser $R$ par $H(s+1)$, nous pouvons supposer que $R \in \mathcal{D}$. Pour tout entier $i \in \mathbf{N}^*$, rappelons que $R^i$ désigne l'opérateur obtenu en composant $i$ fois $R$. En itérant l'équation (6) puis en substituant $s - \ell - k - 1$ à $s$, il vient :

$$b(s) \cdots b(s-\ell-k-1)mf^s = R^{-\ell-k} mf^{s-\ell-k} \tag{9}$$

Ainsi, l'opérateur $R^{-\ell-k}$ annule $mf^{-\ell}$. Par hypothèse, il s'écrit donc :

$$R^{-\ell-k} = PH(-\ell) + Q$$

avec $P, Q \in \mathcal{D}$ et $Q \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, mf^s$. En utilisant l'identité (8), l'équation (9) devient alors :

$$b(s) \cdots b(s-\ell-k-1)mf^s = -(s-k)Pf^{-\ell-k-1}.mf^{s+1}$$

Le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{D}m[1/f,s]f^s$ étant sans $\mathbf{C}[s]$-torsion, nous pouvons diviser les membres de cette équation par $(s-k)$. Cela contredit le fait que $b(s)$ soit le polynôme de Bernstein de $mf^s$, ayant $b(-\ell-i) \neq 0$ pour $i = 1, \ldots, -\ell-k-1$, par définition de $k$.

Ainsi, $-\ell$ est nécessairement inférieur à la plus petite racine entière de $b(s)$.

• Montrons l'équivalence *5* $\Leftrightarrow$ *6*. L'implication *5* $\Rightarrow$ *6* est claire. Etablissons sa réciproque. Rappelons d'abord que l'idéal $I_\ell$ est inclu dans $\operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} mf^{-\ell}$.

Soit $P \in \mathcal{D}$, un opérateur annulant $mf^{-\ell}$. En particulier, $P$ annule $mf^{-\ell}$. Avec notre hypothèse sur son l'annulateur, nous en déduisons que $P$ est de la forme $Rf^\ell + Q$ où $R, Q \in \mathcal{D}$ et $Q$ annule $mf^{-\ell}$, étant un élément de l'idéal $I_\ell$. L'opérateur $R$ appartient donc à l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $mf^0$. Sous notre hypothèse sur $\operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} mf^0$, il suffit donc de constater que si $S \in \mathcal{D}$ est opérateur de degré un annulant $mf^0$, alors $Sf^\ell$ appartient à $I_\ell$. Cela résulte directement la relation $Smf^{s+\ell} = (s+\ell)[S,f]mf^{s+\ell-1}$ et l'identité (8). D'où l'équivalence désirée.

Remarque 1.1.2.13 Reprenons les notations du lemme précédent. Lorsque $\mathcal{D}m$ est sans $f$-torsion, l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $m \in \mathcal{M}$ coïncide bien sûr avec celui de $mf^0 \in \mathcal{M}[1/f]$.

## 1.2 Polynôme de Bernstein et cycles évanescents

Etant donnés une fonction analytique $f : \mathcal{X} \to \mathbf{C}$ sur une variété analytique (lisse) et un complexe borné $\mathcal{K} \in \mathrm{D}^b(\mathbf{C}_\mathcal{X})_c$ de faisceaux d'espaces vectoriels sur $\mathcal{X}$ à cohomologie constructible, suivant A. Grothendieck, P. Deligne construit le triangle distingué de $\mathrm{D}^b(\mathbf{C}_{f^{-1}(0)})_c$ :

$$\mathcal{K}|_{f^{-1}(0)} \longrightarrow \Psi_f(\mathcal{K}) \longrightarrow \Phi_f(\mathcal{K}) \xrightarrow{+1}$$

des *cycles évanescents*, muni d'un automorphisme de monodromie $T$ ([D.K, exposés XIII, XIV]). De plus, si $\mathcal{K}$ est un faisceau pervers, on montre que $\Psi_f(\mathcal{K})$ et $\Phi_f(\mathcal{K})$ sont des faisceaux pervers à support $f^{-1}(0)$ (voir [Gk.MP]). Aussi, lorsque $f$ est lisse, d'après la correspondance de Riemann-Hilbert - due à Z. Mebkhout et M. Kashiwara ([Mb3], [K6]) - , pour tout $\mathcal{D}_\mathcal{X}$-Module holonome régulier $\mathcal{M}$, il existe des $\mathcal{D}_{f^{-1}(0)}$-Modules holonomes réguliers $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ tels que $\Psi_f(DR(\mathcal{M})) = DR(\mathcal{M}')$ et $\Phi_f(DR(\mathcal{M})) = DR(\mathcal{M}'')$.

La théorie de la $V$-filtration de Malgrange - Kashiwara permet une construction de tels $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}''$ à partir de $\mathcal{M}$.

L'objectif de cette section est de donner un énoncé de ce théorème fondamental de la théorie du polynôme de Bernstein-Sato, et de montrer en toutes précisions - connues des spécialistes - que les zéros de nos équations fonctionnelles réalisent les valeurs propres de la monodromie des cycles évanescents.

### 1.2.1 Rappels sur la $V$-filtration

Nous faisons ici un rapide survol des résultats sur la $V$-filtration de Malgrange-Kashiwara. Nous reprenons pour cela les notations utilisées par Z. Mebkhout et C. Sabbah dans [M.Sb].

Soient $\mathcal{X}$ une variété analytique lisse de dimension $n+1$, $n \in \mathbf{N}^*$, et $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ une hypersurface lisse. Notons $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{O}_\mathcal{Y}$), le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathcal{X}$ (resp $\mathcal{Y}$), et $\mathcal{D}_\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{D}_\mathcal{Y}$) le faisceau des opérateurs différentiels sur $\mathcal{X}$ à coefficients dans $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{O}_\mathcal{Y}$).

Notons aussi $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_\mathcal{X}$, l'idéal définissant $\mathcal{Y}$.

#### $\mathcal{D}$-Modules spécialisables le long de $\mathcal{Y}$

Pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$, on note $V_k(\mathcal{D}_\mathcal{X}) \subset \mathcal{D}_\mathcal{X}$ le sous-faisceau de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels :

$$V_k(\mathcal{D}_\mathcal{X}) = \{P \in \mathcal{D}_\mathcal{X} \mid P(\mathcal{J}^j) \subset \mathcal{J}^{j-k} \text{ pour tout } j \in \mathbf{Z}\}$$

où $\mathcal{J}^{-j} = \mathcal{O}_\mathcal{X}$ pour tout $j \in \mathbf{N}$.

Cette famille forme une filtration croissante exhaustive de $\mathcal{D}_\mathcal{X}$, vérifiant de plus :

$$V_{k_1}(\mathcal{D}_\mathcal{X})V_{k_2}(\mathcal{D}_\mathcal{X}) \subset V_{k_1+k_2}(\mathcal{D}_\mathcal{X})$$

pour tout $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ (en particulier, $V_0(\mathcal{D}_\mathcal{X}) \subset \mathcal{D}_\mathcal{X}$ est un sous-faisceau d'anneaux). On l'appelle *$V$-filtration de Malgrange-Kashiwara*.

Dans un système de coordonnées $(\underline{x}, t)$ centré en un point $w \in \mathcal{Y}$ tel que $\mathcal{Y}$ ait pour équation $\{t = 0\}$, nous avons, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $V_k(\mathcal{D}_\mathcal{X}) = \sum_{j=0}^{k} (\partial/\partial t)^j V_0(\mathcal{D}_\mathcal{X})$ et $V_{-k}(\mathcal{D}_\mathcal{X}) = t^k V_0(\mathcal{D}_\mathcal{X})$ ; quant à $V_0(\mathcal{D}_\mathcal{X})$, il est constitué des opérateurs de la forme :

$$P = \sum_{j=0}^{N} P_j \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j$$

où les $P_j \in \mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ sont indépendants de $(\partial/\partial t)$.

Indépendamment du choix des coordonnées, l'opérateur $t(\partial/\partial t)$ définit au voisinage de $w$ un élément de $\mathrm{gr}_0^V(\mathcal{D}_{\mathcal{X}}) = V_0(\mathcal{D}_{\mathcal{X}})/V_{-1}(\mathcal{D}_{\mathcal{X}})$, noté $E$. C'est *l'opérateur d'Euler* au voisinage de $w$.

DÉFINITION 1.2.1.1 *Soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$-Module cohérent et $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ une hypersurface lisse. On dit que $\mathcal{N}$ est* spécialisable le long de $\mathcal{Y}$ *si toute section locale $u \in \mathcal{N}$ satisfait à une équation de la forme :*

$$c(E)u \in V_{-1}(\mathcal{D}_{\mathcal{X}})u \tag{1}$$

*où $c(s) \in \mathbf{C}[s]$ est un polynôme non nul, au voisinage de tout point où $u$ est définie.*

On montre que les modules spécialisables le long de $\mathcal{Y}$ forment une catégorie abélienne, notée $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$. A partir du théorème 1.1.1.1, on établit que les $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$-Modules holonomes sont spécialisables le long de toute hypersurface lisse.

DÉFINITION 1.2.1.2 *Soient $\mathcal{N}$ un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$-Module cohérent spécialisable le long de $\mathcal{Y}$ et $w$ un point de $\mathcal{X}$. Pour toute section locale $u \in \mathcal{N}$ définie sur un voisinage de $w$, on appelle* polynôme de Bernstein en $w$ de la section $u$, *le générateur unitaire de l'idéal principal des polynômes satisfaisant l'identité (1) au niveau des germes en $w$. On le note $c(u,s)$.*

Rappelons le lien bien connu entre ces polynômes et les polynômes de Bernstein associés aux sections d'un $\mathcal{D}$-Module holonome (cf. paragraphe 1.1.1).

LEMME 1.2.1.3 *Soient $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, un voisinage de l'origine, et $f : \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe non constante, nulle à l'origine. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome tel que $\mathcal{M}_0$ soit sans $f$-torsion. Notons $\delta(t-f) \in \mathcal{O}_{\Omega\times\mathbf{C}}[1/t-f]/\mathcal{O}_{\Omega\times\mathbf{C}}$, la section définie par $1/t-f$. Pour tout élément $m \in \mathcal{M}_0$ non nul, le polynôme de Bernstein de $mf^s$ coïncide au signe près avec $c(m\delta(t-f), -s-1)$, où $m\delta(t-f)$ désigne $m \otimes \delta(t-f) \in \mathcal{M}_0 \otimes (\mathcal{O}_{x,t}[1/t-f]/\mathcal{O}_{x,t})$.*

*Preuve.* Suivant [Ml1], munissons $\mathcal{M}_0[1/f,s]f^s$ d'une structure de $\mathcal{D}_{x,t}$-module en posant :

$$\begin{aligned} t a(s) u f^s &= a(s+1) u f^{s+1} \\ \frac{d}{dt} a(s) u f^s &= -s a(s-1) u f^{s-1} \end{aligned}$$

avec $a(s) \in \mathcal{O}[1/f, s]$, $u \in \mathcal{M}$. Remarquons que la multiplication par $s$ coïncide avec l'action de $(-d/dt)t$.

Montrons que l'annulateur dans $\mathcal{D}_{x,t}$ de $mf^s$ coïncide avec celui de $m\delta(t-f)$. En effet, un calcul élémentaire établit que pour tout opérateur $P \in \mathcal{D}_{x,t}$, nous avons :

$$Pmf^s = \sum_{i=0}^{\ell} s(s-1)\cdots(s-i+1)m_i f^{s-i}$$

et

$$Pm\delta(t-f) = \sum_{i=0}^{\ell} i! m_i \delta_{i+1}(t-f)$$

où $m_i \in \mathcal{D}m$, $i = 0, \ldots, \ell$, et $\delta_k(t-f) \in \mathcal{O}_{x,t}[1/t-f]/\mathcal{O}_{x,t}$, $k \in \mathbf{N}^*$, désigne la classe de $1/(t-f)^k$. Ainsi, le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}_0$ (resp. $\mathcal{M}_0[1/f, s]f^s$) étant sans $f$-torsion (resp. $\mathbf{C}[s]$-torsion), $Pmf^s$ est nul si et seulement si $m_0 = \cdots = m_\ell = 0$ ; c'est-à-dire si et seulement si $P$ annule $m\delta(t-f)$ (la somme $\sum_{k\geq 1}(\mathcal{D}m)\delta_k(t-f)$ étant directe), comme souhaité.

D'autre part, $[P(s)f - d(s)]mf^s = [P(-t(\partial/\partial t) - 1)t - d(-t(\partial/\partial t) - 1)]mf^s$ pour tout $P(s) \in \mathcal{D}[s]$, $d(s) \in \mathbf{C}[s]$. Le résultat annoncé s'en déduit aisément.

Ce résultat est à rapprocher du lemme 1.1.1.8.

Remarquons que si l'on ne suppose pas que $\mathcal{M}_0$ soit sans $f$-torsion, la même preuve établit que $b(mf^s, s)$ divise $c(m\delta(t-f), -s-1)$.

Remarque 1.2.1.4 Avec les notations du lemme précédent, constatons que si $\{m_1, \ldots, m_r\}$ est un système générateur de $\mathcal{M}_0$, alors les $m_i\delta(t-f)$, $i = 1, \ldots, r$, engendrent $\mathcal{M}_0 \otimes (\mathcal{O}_{x,t}[1/t-f]/\mathcal{O}_{x,t})$. Cela résulte de la proposition 1.1.2.10 et du fait que $b(m(t-f)^s, s) = s+1$ pour tout $m \in \mathcal{M}_0$ non nul.

### $V$-filtration canonique

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{C}$ est muni de l'ordre lexicographique dans sa décomposition $\mathbf{R} \oplus i\mathbf{R}$.

Soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$-Module spécialisable le long de $\mathcal{Y}$. Associons-lui la filtration $\{V_\alpha\mathcal{N}\}_{\alpha\in\mathbf{C}}$ croissante, exhaustive, définie de la façon suivante : au voisinage de tout point $w \in \mathcal{X}$, pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, $V_\alpha\mathcal{N}$ est l'ensemble des sections locales $u \in \mathcal{N}$ telles que toutes les racines de $c(u, s)$ sont supérieures ou égales à $-\alpha - 1$. C'est la *$V$-filtration canonique* de $\mathcal{N}$. Elle satisfait aux conditions suivantes :

**(i)** pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, $V_\alpha\mathcal{N}$ est un $V_0(\mathcal{D}_{\mathcal{X}})$-Module cohérent.

**(ii)** pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, $k \in \mathbf{Z}$, $V_k(\mathcal{D}_\mathcal{X})V_\alpha\mathcal{N} \subset V_{\alpha+k}\mathcal{N}$.

**(iii)** si $\{t = 0\}$ est l'équation locale de $\mathcal{Y}$, alors, pour tout $\alpha < 0$, $t(V_\alpha\mathcal{N}) = V_{\alpha-1}\mathcal{N}$.

**(iv)** pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, l'action de $(E + \alpha + 1)$ sur $\mathrm{gr}^V_\alpha\mathcal{N}$ est nilpotente, où $\mathrm{gr}^V_\alpha\mathcal{N} = V_\alpha\mathcal{N}/V_{<\alpha}\mathcal{N}$ et $V_{<\alpha}\mathcal{N} = \cup_{\beta<\alpha}V_\beta\mathcal{N}$.

**(v)** pour tout point $w \in \mathcal{X}$, il existe un ensemble fini $\mathcal{A} \subset \mathbf{C}$ tel que si $\alpha \notin \mathcal{A} + \mathbf{Z}$, alors $\mathrm{gr}^V_\alpha\mathcal{N}$ est nul sur un voisinage de $w$.

On montre que, réciproquement, si $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{D}_\mathcal{X}$-Module cohérent muni d'une filtration $\{\mathcal{F}_\alpha\mathcal{N}\}_{\alpha\in\mathbf{C}}$ croissante, exhaustive, qui vérifie **(i)-(v)**, alors $\mathcal{N}$ est spécialisable le long de $\mathcal{Y}$, et $\{\mathcal{F}_\alpha\mathcal{N}\}_{\alpha\in\mathbf{C}}$ coïncide avec la $V$-filtration canonique de $\mathcal{N}$.

Rappelons quelques propriétés de la $V$-filtration canonique :
- pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, $\mathrm{gr}^V_\alpha\mathcal{N}$ est $\mathcal{D}_\mathcal{Y}$-cohérent. Si $\mathcal{N}$ est holonome régulier, on montre que $\mathrm{gr}^V_\alpha\mathcal{N}$ est $\mathcal{D}_\mathcal{Y}$-holonome régulier ([Mb5, cor. 4.7.7, p. 225]).
- pour tout $\alpha \neq 0$, les applications $\mathbf{C}$-linéaires $t : \mathrm{gr}^V_\alpha\mathcal{N} \to \mathrm{gr}^V_{\alpha-1}\mathcal{N}$ et $(\partial/\partial t) : \mathrm{gr}^V_{\alpha-1}\mathcal{N} \to \mathrm{gr}^V_\alpha\mathcal{N}$ sont bijectives. C'est une conséquence directe de la condition **(iv)**.

Au lemme suivant, nous explicitons l'ensemble $\mathcal{A}+\mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$ minimal associé à un point $w \in \mathcal{X}$.

LEMME 1.2.1.5 *Soient $\mathcal{N}$ un $\mathcal{D}_\mathcal{X}$-Module spécialisable le long de $\mathcal{Y}$, et $w$ un point de $\mathcal{X}$. Notons $\mathcal{B}_w \subset \mathbf{C}$, l'ensemble des opposées des racines du polynôme de Bernstein de toute section de $\mathcal{N}$ définie sur un voisinage de $w$.*

(i) *L'ensemble des opposées des racines des polynômes de Bernstein des éléments d'un système générateur (fini) local de $\mathcal{N}$ définit un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathbf{C}$ satisfaisant* **(v)**. *De plus, $\mathcal{B}_w$ est alors contenu dans cet ensemble $\mathcal{A} + \mathbf{Z}$.*

(ii) *Soit $\alpha \in \mathbf{C}$. Alors $\mathrm{gr}^V_\alpha\mathcal{N}$ est non nul au voisinage de $w$ si et seulement si il existe une section locale de $\mathcal{N}$ définie au voisinage de $w$ dont le polynôme de Bernstein ait la racine $-\alpha - 1$.*

(iii) *Si $\alpha \in \mathbf{C} - \mathbf{Z}$ est un nombre complexe non entier, $\mathrm{gr}^V_\alpha\mathcal{N}$ est non nul au voisinage de $w$ si et seulement si $\alpha$ appartient à l'ensemble $\mathcal{B}_w + \mathbf{Z}$.*

*Preuve.* La démonstration du premier point utilise des résultats sur les $V$-bonnes filtrations relativement à $\mathcal{Y}$ du $\mathcal{D}_\mathcal{X}$-Module spécialisable $\mathcal{N}$ (voir [Mb5, p. 203-210]). Rappelons seulement que ce sont des filtrations $\{U_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ de $\mathcal{N}$, croissantes, exhaustives, vérifiant **(ii)**, et pour lesquelles localement au voisinage des points de $\mathcal{X}$, il existe des polynômes dits de Bernstein $d(s) \in \mathbf{C}[s] - \{0\}$ satisfaisant l'identité $d(E + k)U_k \subset U_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

• Montrons le premier point. Soit $\{u_1, \dots, u_r\}$ un système de générateurs de $\mathcal{N}$ sur un voisinage de $w$. Considérons la $V$-bonne filtration $\{U_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ de $\mathcal{N}$ définie en posant $U_k = \sum_{i=1}^r V_k(\mathcal{D}_{\mathcal{X}})u_i$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$. En utilisant l'identité dans $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ suivante :

$$e(t\frac{\partial}{\partial t} + k)V_k(\mathcal{D}_{\mathcal{X}}) \subset V_k(\mathcal{D}_{\mathcal{X}})e(t\frac{\partial}{\partial t}) + V_{k-1}(\mathcal{D}_{\mathcal{X}})$$

où $e(s) \in \mathbf{C}[s]$ et $k \in \mathbf{Z}$, on constate aisément que $d(s) = \prod_{i=1}^r c(u_i, s)$ est un polynôme de Bernstein de la filtration $\{U_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$.

Soit $u \in \mathcal{N}$ une section non nulle. Notons $\{U'_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ la $V$-bonne filtration de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}u \subset \mathcal{N}$ induite par $\{U_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ ([Mb5, cor. 4.2.3, p. 206]). Si $\ell \in \mathbf{Z}$ est un entier tel que $u \in U'_\ell$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, nous avons l'identité :

$$\prod_{i=0}^{k} d(E + \ell - i)u \in U'_{\ell-k-1}$$

Par comparaison de la $V$-bonne filtration $\{U'_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}u$ avec celle induite par la $V$-filtration de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ ([Mb5, prop. 4.2.1, $i) \Rightarrow ii)$, p. 206]), nous établissons que pour tout $k \in \mathbf{N}$ assez grand, $U'_{\ell-k-1}$ est contenu dans $V_{-1}(\mathcal{D}_{\mathcal{X}})u$. En conséquence, les racines de $c(u, s)$ sont des éléments de $d^{-1}(0)+\mathbf{Z}$. L'assertion résulte alors de la définition de la $V$-filtration canonique.

• Etablissons le second point. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$. Supposons qu'il existe une section locale $u \in \mathcal{N}$ non nulle, définie sur un voisinage de $w$, dont le polynôme de Bernstein admette $-\alpha-1$ pour racine. Si c'est sa plus petite racine, $\mathrm{gr}^V_\alpha\mathcal{N}$ est bien non nul. Sinon, il existe $\beta \in \mathbf{C}$, $\beta > \alpha$, tel que $u \in V_\beta\mathcal{N} - V_\alpha\mathcal{N}$. En utilisant la propriété **(iv)**, on construit alors un polynôme $d(s) \in \mathbf{C}[s] - \{0\}$ tel que $d(E)u \in V_\alpha\mathcal{N}$ et dont les racines sont supérieures ou égales à $-\beta - 1$ et strictement inférieures à $-\alpha - 1$.

Comme $V_{-1}(\mathcal{D}_{\mathcal{X}})d(E)u \subset V_{-1}(\mathcal{D}_{\mathcal{X}})u$, le polynôme $d(s)c(d(E)u, s)$ est un multiple de $c(u, s)$. Par suite, $-\alpha - 1$ est une racine de $c(d(E)u, s)$. C'est donc sa plus petite racine, puisque $d(E)u \in V_\alpha\mathcal{N}$. Aussi, $\mathrm{gr}^V_\alpha\mathcal{N}$ est non nul.

Cela établit (ii), l'autre implication étant patente.

• Le dernier point est une conséquence directe de (ii) et de la seconde propriété rappelée avant l'énoncé du lemme.

Ainsi, la $V$-filtration canonique de $\mathcal{N}$ est un objet adapté à l'étude globale des racines des polynômes de Bernstein des sections locales de $\mathcal{N}$.

### 1.2.2 Le théorème fondamental

Rappelons la construction de Grothendieck - Deligne du triangle des cycles évanescents ([D.K, exposés XIII, XIV]). Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbf{C}$, une fonction analytique non constante. Posons $\mathcal{Y} = f^{-1}(0) \subset \mathcal{X}$ et $i$ l'inclusion de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{X}$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d, "f"] & \mathcal{X}^* \arrow[l, hook'] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{X}^*} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[ll, bend right, "\pi"'] \\
\{0\} \arrow[r, hook] & \mathbf{C} & \mathbf{C}^* \arrow[l, hook'] & \widetilde{\mathbf{C}^*} \arrow[l, "p"']
\end{tikzcd}$$

où $p$ désigne le revêtement universel de $\mathbf{C}^*$, $\mathcal{X}^* = \mathcal{X} - \mathcal{Y}$, et $\widetilde{\mathcal{X}^*}$ est le produit fibré de $f$ et $p$ au dessus de $\mathbf{C}^*$. A un complexe borné $\mathcal{K} \in \mathrm{D}^b(\mathbf{C}_{\mathcal{X}})_c$ de faisceaux de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels sur $\mathcal{X}$ à cohomologie constructible, on associe son *complexe des cycles proches* $\Psi_f(\mathcal{K}) = i^{-1}R\pi_*\pi^{-1}\mathcal{K} \in \mathrm{D}^b(\mathbf{C}_{\mathcal{Y}})_c$. Le cône du morphisme naturel $i^{-1}\mathcal{K} \to \Psi_f(\mathcal{K})$ est le *complexe des cycles évanescents*, noté $\Phi_f(\mathcal{K}) \in \mathrm{D}^b(\mathbf{C}_{\mathcal{Y}})_c$. De plus, la monodromie de $p$ induit un automorphisme $T$ de monodromie sur $\Psi_f(\mathcal{K})$ qui est l'identité sur $i^{-1}\mathcal{K}$. Par suite, il y a aussi un automorphisme de monodromie $T$ sur $\Phi_f(\mathcal{K})$.

L'intérêt de cette construction est que pour tout $w \in \mathcal{Y}$, la fibre $\Psi_f(\mathcal{K})_w$ s'identifie à l'hypercohomologie à valeurs dans $\mathcal{K}$ de la fibre de la fibration de Milnor de $f$ en $w$.

Rappelons enfin que le foncteur $\mathrm{DR} = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathcal{X}}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, -)$ (resp. $\mathrm{Sol} = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathcal{X}}}(-, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$) réalise une équivalence (resp. anti-équivalence) de catégories - dûes à Z. Mebkhout et M. Kashiwara ([Mb3], [K6]) - entre la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$-Modules holonomes réguliers et celle des faisceaux pervers sur $\mathcal{X}$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème fondamental.

Théorème 1.2.2.1 ([Ml2], [K4], [M.Sb], [Sb1], [Mb7], [StM]) *Soient $\mathcal{X}$ une variété analytique complexe et $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ une hypersurface lisse définie par $t = f : \mathcal{X} \to \mathbf{C}$. Pour tout $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$-Module holonome régulier $\mathcal{N}$, il y a des quasi-isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{DR}(\bigoplus_{-1 \leq \alpha < 0} \mathrm{gr}_\alpha^V(\mathcal{N})) \longrightarrow \Psi_f(\mathrm{DR}(\mathcal{N}))$$
$$\mathrm{DR}(\bigoplus_{-1 < \alpha \leq 0} \mathrm{gr}_\alpha^V(\mathcal{N})) \longrightarrow \Phi_f(\mathrm{DR}(\mathcal{N}))$$

*De plus, par ces quasi-isomorphismes, la monodromie $T$ correspond à l'action de* $\exp(-2i\pi t\partial/\partial t)$ *sur* $\mathrm{gr}_\alpha^V(\mathcal{N})$

Lorsque $f$ n'est pas lisse, on se ramène à cette situation en factorisant $f$ par son graphe.

Le détail de l'historique de ce résultat est rappelé dans l'introduction. Signalons que Y. Laurent et B. Malgrange ont généralisé cet énoncé au cas des complexes ([L.Ml]).

Remarquons enfin que ce théorème fournit une preuve directe de la perversité de $\Psi_f(\mathcal{K})$ et $\Phi_f(\mathcal{K})$ lorsque $\mathcal{K}$ est un faisceau pervers.

COROLLAIRE 1.2.2.2 *Soient* $\Omega \subset \mathbf{C}^n$*, un voisinage de l'origine, et* $f : \Omega \to \mathbf{C}$*, une fonction analytique non constante, nulle à l'origine. Soit* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{D}_\Omega$*-Module holonome régulier tel que* $\mathcal{M}_0$ *soit sans* $f$*-torsion et tel que* $\bigcap_{i\in\mathbf{N}} f^i\mathcal{M}_0$ *soit réduit à zéro. Notons* $\Sigma \subset \mathbf{C}/\mathbf{Z}$*, l'ensemble des classes modulo* $\mathbf{Z}$ *des racines des polynômes de Bernstein* $b(mf^s, s)$ *des éléments* $m$ *d'un système générateur fini de* $\mathcal{M}$ *au voisinage de l'origine.*

*La réunion des valeurs propres de la monodromie de* $\Psi_f(\mathrm{Sol}(\mathcal{M}))$ *en tous les points* $w \in f^{-1}(0)$ *voisin de* $0$ *est l'ensemble des nombres complexes* $\exp(-2i\pi q)$*,* $q \in \Sigma$*.*

*Preuve.* Cela résulte du théorème précédent, de [Mb5, cor. 4.10.3, p. 233], du théorème de dualité locale ([Mb2], [N-M]), des lemmes 1.2.1.5, 1.2.1.3, 1.1.1.3, et de la remarque 1.2.1.4.

## 1.3 Polynôme de Bernstein d'une fonction sur une intersection complète

Après les rappels généraux faits aux paragraphes précédents, nous choisissons maintenant un $\mathcal{D}$-module holonome régulier convenable pour étendre dans un cadre singulier la théorie du polynôme de Bernstein-Sato d'un germe de fonction holomorphe.

### 1.3.1 Le module de cohomologie locale algébrique

Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, un voisinage de l'origine. Notons $\mathcal{O}_\Omega$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $\Omega$, $\mathcal{O}$ sa fibre à l'origine, et $\mathcal{D}_\Omega = \mathcal{O}_\Omega\langle\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\rangle$ le faisceau des opérateurs différentiels sur $\Omega$ à coefficients dans $\mathcal{O}_\Omega$, de fibre à l'origine $\mathcal{D}$.

• Rappelons ([Mb5, p. 80]) qu'étant donné un sous-espace analytique fermé $Y \subset \Omega$, on construit le foncteur covariant $\Gamma_Y(-)_{alg}$ de la catégorie des $\mathcal{D}_\Omega$-Modules à gauche dans elle-même, en posant :

$$\Gamma_Y(\mathcal{M})_{alg} = \lim_{\overrightarrow{k}} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_\Omega}(\mathcal{O}_\Omega/\mathcal{J}^k, \mathcal{M})$$

pour tout $\mathcal{D}_\Omega$-Module $\mathcal{M}$, où $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_\Omega$ est un idéal définissant $Y$. C'est le foncteur de *cohomologie locale algébrique à support* $Y$. Ce foncteur exact à gauche donne naissance au foncteur $R\Gamma_Y(-)_{alg}$ de la catégorie dérivée des complexes bornés à gauche de $\mathcal{D}_\Omega$-Modules dans elle-même (voir [Mb5, p. 80-104] pour le détail de ses propriétés).

• Soit $(f, g_1, \dots, g_p) : \Omega \to \mathbf{C}^{p+1}$ une application analytique nulle à l'origine, définissant une intersection complète $Z$. Notons $g$, l'application $(g_1, \dots, g_p) : \Omega \to \mathbf{C}^p$, et $X \subset \Omega$ le sous-espace analytique défini par $g$.

Lorsque $X$ est réduit, on peut associer à $f|_X : (X, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ une fibration continue localement triviale analogue à celle de J. Milnor lorsque $X$ est lisse ([Lê2], [Mn]). Pour étudier des "polynômes de Bernstein de la restriction de $f$ à $X$", le corollaire 1.3.1.3 nous incite à considérer un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome régulier dont le complexe des solutions holomorphes soit le faisceau pervers $\mathbf{C}_X[p]$. C'est $R^p\Gamma_X(\mathcal{O}_\Omega)_{alg}$, $p^{ème}$-groupe de cohomologie locale algébrique de $\mathcal{O}_\Omega$ à support dans $X$, qui convient. Cela résulte des deux faits suivants :

- d'après ([Gt], [Mb1], [K2]), si $Y \subset \Omega$ est un sous-espace analytique fermé, $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_\Omega}(R\Gamma_Y(\mathcal{O}_\Omega)_{alg}, \mathcal{O}_\Omega) = \mathbf{C}_Y$ et $R\Gamma_Y(\mathcal{O}_\Omega)_{alg}$ est à cohomologie holonome. Sa régularité résulte du théorème de Comparaison ([Mb5]).
- puisque $X$ est une intersection complète à l'origine, il est bien connu que la cohomologie de $R\Gamma_X(\mathcal{O}_\Omega)_{alg}$ est concentrée en degré $p$, et que $R^p\Gamma_X(\mathcal{O}_\Omega)_{alg}$ peut être identifié au $\mathcal{D}_\Omega$-Module :

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{O}_\Omega[1/g_1 \cdots g_p]}{\sum_{i=1}^p \mathcal{O}_\Omega[1/g_1 \cdots \check{g}_i \cdots g_p]}$$

(voir [Bk, prop. 3.1.2.3, p. 18] par exemple).

Aussi, dans toute la suite de ce travail, nous étudierons les polynômes de Bernstein associés aux sections de $\mathcal{R}$.

• Donnons quelques propriétés du $\mathcal{D}$-module $\mathcal{R}_0$.

LEMME 1.3.1.1 *Soit* $(h_1, \dots, h_k) \in \mathcal{O}^k$, *une suite* $\mathcal{O}$*-régulière.*

*Alors le morphisme naturel :*

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{O} & \longrightarrow & \dfrac{\mathcal{O}[1/h_1 \cdots h_k]}{\sum_{i=1}^{k} \mathcal{O}[1/h_1 \cdots \check{h}_i \cdots h_k]} \\ v & \longmapsto & \dfrac{\dot{v}}{h_1 \cdots h_k} \end{array}$$

*admet pour noyau l'idéal* $(h_1, \ldots, h_k)\mathcal{O}$.

*Preuve.* Soit $v \in \ker \phi$. Il existe alors $l_1, \ldots, l_k \in \mathbf{N}^*$, $v_1, \ldots, v_k \in \mathcal{O}$, tels que

$$\frac{v}{h_1 \cdots h_k} = \frac{v_1}{(h_2 \cdots h_k)^{l_1}} + \cdots + \frac{v_k}{(h_1 \cdots h_{k-1})^{l_k}}$$

dans $\mathcal{O}[1/h_1 \cdots h_k]$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $l_1 = \cdots = l_k = \ell \in \mathbf{N}^*$. L'équation devient :

$$v(h_1 \cdots h_k)^{\ell - 1} = v_1 h_1^{\ell} + \cdots + v_k h_k^{\ell} \ .$$

Si $\ell = 1$, $v$ appartient bien à l'idéal annoncé. Sinon, l'identité se réécrit :

$$(v(h_2 \cdots h_k)^{\ell-1} - v_1 h_1) h_1^{\ell-1} = v_2 h_2^{\ell} + \cdots + v_k h_k^{\ell} \ .$$

La suite $(h_1^{\ell-1}, h_2^{\ell}, \ldots, h_k^{\ell})$ étant régulière, il existe donc $v_2', \ldots, v_k' \in \mathcal{O}$, tels que :

$$v(h_2 \cdots h_k)^{\ell-1} - v_1 h_1 = v_2' h_2^{\ell} + \cdots + v_k' h_k^{\ell} \ .$$

Si $k = 1$, le lemme est démontré. Sinon, en itérant pour $h_2$, puis pour $h_3, \ldots, h_k$, ce qui fut fait pour $h_1$, on montre que $v$ appartient à l'idéal $(h_1, \ldots, h_k)\mathcal{O}$, comme souhaité.

Remarquons que ce résultat donne l'annulateur dans $\mathcal{O}$ de toute section $\delta \in \mathcal{R}_0$. De plus, il résulte facilement de ce lemme que la multiplication par $f$ dans $\mathcal{R}_0$ est injective.

LEMME 1.3.1.2 *Soit $\delta \in \mathcal{R}_0$, un germe non nul. Alors, il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que $\delta \in f^r \mathcal{R}_0$ et $\delta \notin f^{r+1} \mathcal{R}_0$. En particulier, $\bigcap_{i \in \mathbf{N}} f^i \mathcal{R}_0$ est réduit à zéro.*

*Preuve.* Pour tout multi-indice $L = (l_1, \ldots, l_p) \in (\mathbf{N}^*)^p$, notons $I_L \subset \mathcal{O}$, l'idéal $(g_1^{l_1}, \ldots, g_p^{l_p})\mathcal{O}$. Ecrivons $\delta = \dot{a}/g_1^{l_1} \cdots g_p^{l_p}$ où $L = (l_1, \ldots, l_p) \in (\mathbf{N}^*)^p$ et $a \in \mathcal{O}$, $a \notin I_L$. Montrons qu'il existe un entier $r \in \mathbf{N}$ tel que $a \in I_L + f^r \mathcal{O}$ et $a \notin I_L + f^{r+1}\mathcal{O}$. Sinon, pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, $a$ appartient à l'idéal $I_L + f^k \mathcal{O}$. Remarquons que $f$ appartient à l'idéal maximal de $\mathcal{O}$. Par le lemme d'intersection de Krull, le germe $a$ appartient donc à l'idéal $I_L$ ; ce qui est exclu.

Ainsi, il existe $r \in \mathbf{N}$ et $\tilde{a} \in \mathcal{O}$ tels que $\delta = \dot{\overline{f^r \tilde{a} / g_1^{l_1} \cdots g_p^{l_p}}}$ et $\tilde{a} \notin I_L + f\mathcal{O}$. Montrons que $\delta \notin f^{r+1}\mathcal{R}_0$.

Supposons que ce ne soit pas le cas. La multiplication par $f$ dans $\mathcal{R}_0$ étant injective, il existe alors $v \in \mathcal{O}$, $L' = (l'_1, \ldots, l'_p) \in (\mathbf{N}^*)^p$ tels que :

$$\frac{\dot{\tilde{a}}}{g_1^{l_1} \cdots g_p^{l_p}} = \frac{\dot{f v}}{g_1^{l'_1} \cdots g_p^{l'_p}} .$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $l'_i \geq l_i$ pour $i = 1, \ldots, p$. D'après le lemme 1.3.1.1, $\tilde{a} g_1^{l'_1 - l_1} \cdots g_p^{l'_p - l_p} - f v$ appartient à l'idéal $I_{L'}$. En particulier :

$$\frac{\dot{\overline{\tilde{a} g_1^{l'_1 - l_1} \cdots g_p^{l'_p - l_p}}}}{g_1^{l'_1} \cdots g_p^{l'_p} f} = \frac{\dot{\tilde{a}}}{g_1^{l_1} \cdots g_p^{l_p} f}$$

est nul dans $\mathcal{R}_0[1/f]/\mathcal{R}_0$. D'après le lemme 1.3.1.1, $\tilde{a} \in (f, g_1^{l_1}, \ldots, g_p^{l_p})\mathcal{O}$. Ce qui est faux. En conséquence, $\delta \notin f^{r+1}\mathcal{R}_0$. Ce qui achève la preuve.

• Il résulte des deux lemmes précédents que tous les résultats du paragraphe 1.1.1 s'appliquent au $\mathcal{D}_\Omega$-Module $\mathcal{R}$. En particulier, si $\delta_L$ désigne la classe dans $\mathcal{R}$ de $1/g_1^{l_1} \cdots g_p^{l_p}$, $L = (l_1, \ldots, l_p) \in (\mathbf{N}^*)^p$, alors $b(\delta_L f^s, s) = (s+1)\tilde{b}(\delta_L f^s, s)$.

Remarquons aussi que $\mathcal{R}$ satisfait aux hypothèses du corollaire 1.2.2.2.

PROPOSITION 1.3.1.3 *Soient $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ un voisinage de l'origine, et $(f, g_1, \ldots, g_p) : \Omega \to \mathbf{C}$, une application analytique nulle en zéro définissant une intersection complète à l'origine. Notons $X \subset \Omega$, l'intersection complète définie par $(g_1, \ldots, g_p)$, et $\mathcal{R}$ le module de cohomologie locale algébrique de $\mathcal{O}_\Omega$ à support dans $X$.*

*Les racines des polynômes de Bernstein $b(\delta f^s, s)$, $\delta \in \mathcal{R}_0$ non nul, sont rationnelles.*

*Preuve.* Cela résulte du corollaire 1.2.2.2 et de la quasi-unipotence de la monodromie de $f : (X_{\mathrm{red}}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ ([Lê3], [K3]).

Cela généralise le résultat de la théorie classique ([Ml1], [K1]).

### 1.3.2 Résultats lorsque l'espace $X$ est lisse

Reprenons les notations introduites au paragraphe 1.3.1

Dans ce paragraphe, nous donnons des résultats sur les polynômes de Bernstein associés aux sections de $\mathcal{R}$ quand l'application $g$ est lisse à l'origine.

PROPOSITION 1.3.2.1 *Supposons que $g$ soit une submersion à l'origine. Soit $a \in \mathcal{O}_\Omega$, n'appartenant pas à l'idéal $(g_1, \ldots, g_p)\mathcal{O}_\Omega$. Notons $\tilde{a}$, $\tilde{f} \in \mathcal{O}_X$ les restrictions à $X$ de $a$ et $f$ respectivement, et $\delta$ la section $\dot{1}/g_1 \cdots g_p \in \mathcal{R}$.*

*Alors $b(a\delta f^s, s) = b(\tilde{a}\tilde{f}^s, s)$.*

*Preuve.* C'est une conséquence directe du lemme 1.1.1.7.

Ainsi, l'étude des polynômes de Bernstein des sections $\delta f^s$ est bien une généralisation de la théorie classique.

REMARQUE 1.3.2.2 La démonstration du lemme 1.1.1.7 illustre une certaine 'souplesse d'utilisation' des polynômes de Bernstein associés aux sections de $\mathcal{R}$ autorisée par le lemme 1.1.1.6.

Ce fait est *a posteriori* tout à fait naturel, puisque, en géométrie algébrique élémentaire, une fonction $\varphi$ sur un sous-espace algébrique $V \subset k^N$ n'est définie que modulo un élément de l'idéal $J(V) \subset k[x]$.

PROPOSITION 1.3.2.3 *Supposons que $g$ soit une submersion à l'origine. Notons $\tilde{f}$ la restriction de $f$ à la sous-variété $X$, $\mathcal{D}_X$ l'anneau des opérateurs différentiels sur $X$, et $b(s) = (s+1)\tilde{b}(s)$ le polynôme de Bernstein de $\tilde{f}$ en $0$.*

*Alors, pour toute section locale $\delta \in \mathcal{R}$ non nulle, il existe $\ell$, $r \in \mathbf{N}$ tels que $b(\delta f^s, s)$ divise $b(s+r) \cdots b(s)\tilde{b}(s-1) \cdots \tilde{b}(s-\ell)$.*

*Plus précisément, si $\delta = \dot{1}/g_1^{l_1} \cdots g_p^{l_p}$ avec $L = (l_1, \ldots, l_p) \in (\mathbf{N}^*)^p$, alors $\ell = |L| - p$ et $r = 0$ conviennent.*

*Preuve.* Plaçons-nous dans un système de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$, dans lequel $g_i = x_i$, $i = 1, \ldots, p$. Ainsi $f$ s'écrit $f = \tilde{f} + h$ où $\tilde{f} \in \mathcal{O}_{X,0}$ et $h \in (x_1, \ldots, x_p)\mathcal{O}_{\Omega,0}$.

Le germe $\delta$ s'écrit $\delta = \dot{a}/x_1^{l_1} \cdots x_p^{l_p}$ avec $L = (l_1, \ldots, l_p) \in (\mathbf{N}^*)^p$ et $a \in \mathcal{O}_{\Omega,0}$ de la forme :

$$a = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_p^{\alpha_p}$$

où $\mathcal{A} \subset \mathbf{N}^p$ est l'ensemble non vide des multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ vérifiant $\alpha_i < l_i$, $i = 1, \ldots, p$, et tels que $a_\alpha \in \mathcal{O}_{X,0}$ est non nul.

Notons $\delta'$ la section $\dot{1}/x_1^{l_1} \cdots x_p^{l_p} \in \mathcal{R}_0$ (en particulier $a\delta' = \delta$).

Soit $\ell \leq |L| - p$, le plus petit entier tel que $h^{\ell+1}$ appartient à l'idéal $(x_1^{l_1}, \ldots, x_p^{l_p})\mathcal{O}_{\Omega,0}$. Pour tout entier $j > \ell$, nous avons donc l'égalité dans $\mathcal{R}_0$

$$\delta' f^j = \sum_{i=0}^{\ell} \mathrm{C}_j^i h^i \delta' \tilde{f}^{j-i} \tag{1}$$

En particulier, pour tout $j \in \mathbf{N}$ :

$$\frac{\dot{f}^j}{x_1 \cdots x_p} = \frac{\dot{\tilde{f}}^j}{x_1 \cdots x_p} \tag{2}$$

Notons $\mathcal{A}'$, l'ensemble des multi-indices de longueur minimale appartenant à $\mathcal{A}$. Soit alors $r \in \mathbf{N}$, la valuation minimale en $x_{p+1}, \ldots, x_n$, pour un élément $a_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}'$. Soit $\alpha \in \mathcal{A}'$, un multi-indice réalisant ce minimum, et $S \in \mathcal{D}_{X,0}$ de degré $r$ tel que $S.a_\alpha = 1$.

Pour tout $j \in \mathbf{N}$, nous avons alors les égalités dans $\mathcal{O}_{X,0}$ suivantes :

$$\tilde{f}^{j+r+1} = \tilde{f}^{j+r+1} S.a_\alpha = R(j).a_\alpha \tilde{f}^{j+1} \tag{3}$$

pour un opérateur $R(s) \in \mathcal{D}_{X,0}[s]$.

Soit $Q(s) \in \mathcal{D}_{X,0}[s]$, un opérateur réalisant l'équation fonctionnelle de $\tilde{f}$

$$b(s)\tilde{f}^s = Q(s)\tilde{f}^{s+1}$$

Pour tout $i, j \in \mathbf{N}$, notons $Q^{[i,j]}(s)$ l'opérateur $Q(s-i)\cdots Q(s+j) \in \mathcal{D}_{X,0}[s]$. Il résulte de (2) et (3) que, pour tout $j \in \mathbf{N}$ :

$$\underbrace{\frac{(-1)^{|L|+p+|\alpha|}}{(L-\alpha-I)!} R(j) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{L-\alpha-I} x_1^{l_1-\alpha_1-1} \cdots x_p^{l_p-\alpha_p-1}}_{A(j)} \delta f^{j+1} = \delta' \tilde{f}^{j+r+1}$$

avec $A(s) \in \mathcal{D}[s]$ et $I = (1, \ldots, 1) \in \mathbf{N}^p$. Ainsi, pour tout $j \in \mathbf{N}$, $0 \leq i \leq \ell$ :

$$\begin{aligned} \underbrace{a\frac{h^i}{i!} Q^{[i,r]}(j) A(j)}_{B(i,j)} \delta f^{j+1} &= b(j+r)\cdots b(j)b(j-1)\cdots b(j-i)\frac{h^i}{i!}\delta \tilde{f}^{j-i} \\ &= b(j+r)\cdots b(j)\tilde{b}(j-1)\cdots \tilde{b}(j-i)\mathrm{C}_j^i h^i \delta \tilde{f}^{j-i} \end{aligned}$$

avec $B(s,t) \in \mathcal{D}[s,t]$. Par suite, pour tout $j > \ell$ :

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{\ell} \tilde{b}(j-i-1)\cdots\tilde{b}(j-\ell)B(i,j)}_{P(j)} \delta f^{j+1} = b(j+r)\cdots b(j)\tilde{b}(j-1)\cdots\tilde{b}(j-\ell)\delta f^j$$

en utilisant (1). D'après le lemme 1.1.1.5, l'opérateur $P(s)f - b(s+r)\cdots b(s)$ $\tilde{b}(s-1)\cdots\tilde{b}(s-\ell)$ annule $\delta f^s$, ce qui prouve la relation de divisibilité de l'énoncé.

Remarquons enfin que l'entier $r$ (resp. $\ell$) ne dépend que de la fonction $a$ (resp. $h$ et de $L$), et est nul lorsque $a = 1$ (resp. $L = (1, \ldots, 1)$).

LEMME 1.3.2.4 *Supposons que l'application $(f, g)$ soit une submersion en $0$. Soit $\delta \in \mathcal{R}$, une section locale non nulle. Soit $r \in \mathbf{N}$, le plus grand entier tel que $\delta \in f^r\mathcal{R}_0$. Alors $b(\delta f^s, s) = s + r + 1$.*

*Preuve.* Plaçons-nous dans un système de coordonnées $x_1, \ldots, x_p, y, z_1, \ldots, z_{n-p-1}$ dans lequel $f = y$ et $g_i = x_i$ pour $i = 1, \ldots, p$. Par hypothèse, $\delta = y^r a\delta'$ où $\delta' \in \mathcal{R}_0$ s'écrit $\delta' = \dot{1}/x_1^{l_1}\cdots x_p^{l_p}$ avec $L = (l_1, \ldots, l_p) \in (\mathbf{N}^*)^p$ et $a \in \mathcal{O}_{\Omega,0}$ est de la forme :

$$a = \sum_{\alpha < L} (u_\alpha + yv_\alpha) x_1^{\alpha_1} \cdots x_p^{\alpha_p}$$

où $u_\alpha \in \mathcal{O}_{Z,0}$, $v_\alpha \in \mathcal{O}_{X,0}$ et $u_\alpha$ est non nul pour au moins un multi-indice $\alpha$. Rappelons que si $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^p$ sont deux multi-indices, nous notons $\alpha \leq \beta$ (resp. $\alpha < \beta$) quand $\alpha_i \leq \beta_i$ pour $i = 1, \ldots, p$ (resp. $\alpha \leq \beta$ et $\alpha \neq \beta$).

Grâce au lemme 1.1.1.3, tout le problème se ramène à trouver un opérateur $P \in \mathcal{D}$ indépendant de $(\partial/\partial y)$ tel que $Pa\delta' = \dot{1}/x_1\cdots x_p$ dans $\mathcal{R}_0$, puisque alors :

$$\frac{(-1)^{|L|+p}a}{(L-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{l_1-1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{l_p-1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) P\delta f^{s+1} = (s+r+1)\delta f^s \; .$$

Soit $\alpha < L$, un multi-indice de longueur minimale tel que $u_\alpha \neq 0$. Nous avons alors :

$$\underbrace{x_1^{l_1-\alpha_1-1}\cdots x_p^{l_p-\alpha_p-1} a\delta'}_{\delta''} = \frac{\dot{u_\alpha}}{x_1\cdots x_p} + y\sum_{\beta\leq\alpha}\frac{\dot{v_\beta}}{x_1^{\alpha_1-\beta_1+1}\cdots x_p^{\alpha_p-\beta_p+1}} \; .$$

Construisons un opérateur $Q \in \mathcal{D}$ indépendant des dérivations par rapport aux variables $y, z_1, \ldots, z_{n-p-1}$ tel que :

$$Q\delta'' = \frac{u_\alpha \dot{+} yv_\alpha}{x_1\cdots x_p} \; .$$

Si $v_\beta = 0$ pour tout $\beta < \alpha$, $Q = 1$ convient. Sinon, soit $\gamma$ un multi-indice de longueur minimale tel que $\gamma < \alpha$ et $v_\gamma \neq 0$. Nous avons alors :

$$\underbrace{\frac{(-1)^{|\alpha|+|\gamma|}}{(\alpha-\gamma)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha-\gamma} x_1^{\alpha_1-\gamma_1}\cdots x_p^{\alpha_p-\gamma_p}}_{R_\gamma}\delta'' = \frac{y\dot{v}_\gamma}{x_1^{\alpha_1-\gamma_1+1}\cdots x_p^{\alpha_p-\gamma_p+1}} .$$

Ainsi :

$$\underbrace{(1-R_\gamma)}_{Q_\gamma}\delta'' = \frac{\dot{u}_\alpha}{x_1\cdots x_p} + y\sum_{\beta\leq\alpha,\ \beta\neq\gamma}\frac{\dot{v}_\beta}{x_1^{\alpha_1-\beta_1+1}\cdots x_p^{\alpha_p-\beta_p+1}} .$$

Donc si $(\beta_1,\ldots,\beta_N)$ est la suite des multi-indices $\beta < \alpha$ tels que $v_\beta \neq 0$, ordonnée par longueur croissante, alors $Q = Q_{\beta_N}\cdots Q_{\beta_1}$ convient.

Comme $u_\alpha \neq 0$, il existe un opérateur $S \in \mathcal{D}_{Z,0}$ tel que $S.u_\alpha = 1$. Par suite, $w = S.(u_\alpha + yv_\alpha)$ est un inversible de $\mathcal{O}_{X,0}$. Alors l'opérateur $P = w^{-1}SQx_1^{l_1-\alpha_1-1}\cdots x_p^{l_p-\alpha_p-1}$ convient.

• Rappelons qu'une application analytique $h = (h_1,\ldots,h_l) : \Theta \to \mathbf{C}^l$ définie sur un voisinage de l'origine $\Theta \subset \mathbf{C}^n$ définit une *intersection complète à singularité isolée* à l'origine si $h(0) = 0$, si $(h_1,\ldots,h_l)$ est une suite $\mathcal{O}_{\Theta,0}$-régulière, et si l'idéal de $\mathcal{O}_{\Theta,0}$ engendré par $h_1,\ldots,h_l$ et les mineurs maximaux de la jacobienne de $h$ contient une puissance de l'idéal maximal.

Le résultat suivant motive l'étude faite au chapitre 3 (voir le lemme 3.1.1.3).

PROPOSITION 1.3.2.5 *Supposons que l'application $(f,g)$ définit une intersection complète à singularité isolée à l'origine. Soit $\delta \in \mathcal{R}$, une section non nulle. Notons $r \in \mathbf{N}$, le plus grand entier tel que $\delta \in f^r\mathcal{R}_0$. Alors, le $\mathcal{D}_\Omega$-Module cohérent :*

$$\mathcal{N} = (s+r+1)\frac{\mathcal{D}_\Omega[s]\delta f^s}{\mathcal{D}_\Omega[s]\delta f^{s+1}}$$

*est supporté par l'origine.*

*Preuve.* Rappelons que la cohérence de $\mathcal{N}$ résulte de la proposition 1.1.2.5. Constatons que toute section locale de $\mathcal{N}$ est annulée par une puissance de l'idéal $(f,g_1,\ldots,g_p)\mathcal{O}_\Omega$. Ainsi, le support de $\mathcal{N}$ est contenu dans $Z$. D'autre part, en un point $q \in Z$ distinct de l'origine, l'application $(f,g)$ est lisse. Il résulte alors du lemme précédent que la fibre $\mathcal{N}_q$ est nulle. D'où le résultat.

### 1.3.3 Le cas d'une fonction lisse sur une hypersurface

Gardons les notations introduites au paragraphe 1.3.1.

Notons $\Gamma \subset \Omega \times \mathbf{C}$, le graphe de la restriction de la fonction $f : \Omega \to \mathbf{C}$ à l'espace $X$, et $z : \Omega \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, la projection naturelle. Aux abus de notation près, la sous-variété $\Gamma$ est définie dans $\Omega \times \mathbf{C}$ par $g_1, \ldots, g_p$, et $z - f$.

En factorisant la fonction $f|_X : X \to \mathbf{C}$ par son graphe $\Gamma$, nous l'identifions avec la projection $z|_\Gamma : \Gamma \to \mathbf{C}$. Quitte à incrémenter la codimension de $X$, nous pouvons donc toujours supposer que l'application $f$ est lisse. Remarquons que cette identification est patente au niveau des polynômes de Bernstein. Cela résulte du lemme 1.1.1.8 et de [Mb5, prop. 6.2.4, p. 83].

Ainsi, après l'étude du paragraphe précédent, la plus simple des situations possibles est le cas d'une fonction lisse $f : \Omega \to \mathbf{C}$ sur une hypersurface $\{g = 0\} \subset \Omega$. Remarquons que cela comprend la théorie 'classique' du polynôme de Bernstein d'un germe de fonction holomorphe (lemme 1.1.1.8 avec $\mathcal{M} = \mathcal{O}$ et $m = 1$).

Dans ce qui suit, nous noterons $\mathcal{R} = \mathcal{O}[1/g]/\mathcal{O}$, le groupe de cohomologie locale algébrique de $\mathcal{O}$ à support dans $\{g = 0\}$, et $\delta$ la classe de $1/g$ dans $\mathcal{R}$.

Remarquons d'abord un fait général.

LEMME 1.3.3.1 *Soient $f, g \in \mathcal{O}$, deux applications non constantes. Supposons que $f$ soit lisse, et que la restriction de $g$ à l'hypersurface $\{f = 0\}$ soit non nulle.*

*Alors, le polynôme de Bernstein de $(1/g)f^s$ coïncide avec $b(\delta f^s, s)$.*

*Preuve.* Notons $c(s) \in \mathbf{C}[s]$, le polynôme de Bernstein de $(1/g)f^s \in \mathcal{O}[1/fg, s]f^s$. Montrons que $c(s)$ divise $b(\delta f^s, s)$, l'autre relation de divisibilité étant manifeste.

Quitte à faire un changement de coordonnées, nous pouvons supposer que $f$ est une coordonnée, notée $z$. Soit $R \in \mathcal{D}[s]$, un opérateur réalisant l'équation fonctionnelle de $\delta f^s$ :

$$b(\delta f^s, s)\delta z^s = R\delta z^{s+1} .$$

Il existe donc un entier $d \in \mathbf{Z}$ et $v \in \mathcal{O}[s]$, $v \notin z\mathcal{O}[s] - \{0\}$, tels que :

$$b(\delta f^s, s)\frac{1}{g}z^s = R\frac{1}{g}z^{s+1} + vz^{s+d} \tag{4}$$

dans $\mathcal{O}[1/zg, s]z^s$. Si $v$ est nul, $c(s)$ divise bien $b(\delta f^s, s)$. Sinon, montrons que $vz^{s+d}$ appartient à $\mathcal{D}[s]z^{s+1}$.

C'est patent si $d \in \mathbf{N}^*$. Supposons que $d \notin \mathbf{N}^*$. En faisant $s = -1, 0, \ldots, -d-1$, nous constatons alors que $(s+1)s \cdots (s+d+1)$ divise $v$. Ce qui entraîne l'appartenance à $\mathcal{D}[s]z^{s+1}$ de $vz^{s+d}$, puisque :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{-d+1} z^{s+1} = (s+1)\cdots(s+d+1)z^{s+d} \; .$$

L'équation (4) implique alors que $b(\delta f^s, s)(1/g)z^s \in \mathcal{D}[s](1/g)z^{s+1}$. Par suite, $c(s)$ divise bien $b(\delta f^s, s)$.

Ainsi, $b(\delta f^s, s) = c(s)$, comme souhaité.

Remarque 1.3.3.2 Sous les mêmes hypothèses et avec les mêmes notations, une preuve analogue établit que $\operatorname{Ann}_{\mathcal{D}[s]} \delta f^s = \operatorname{Ann}_{\mathcal{D}[s]} (1/g) f^s + \mathcal{D}[s]g$.

Donnons enfin un exemple dans lequel $b(\delta f^s, s)$ s'exprime à partir du polynôme de Bernstein de la restriction de la fonction $g$ à $\{f = 0\}$.

Théorème 1.3.3.3 *Soit $h \in \mathcal{O}$, un germe non nul et non inversible. Notons $b(s) \in \mathbf{C}[s]$, son polynôme de Bernstein. Soit $N$, un entier naturel non nul. Soient $z, y_1, \ldots, y_r$, des indéterminées, et $u \in \mathbf{C}\{y\}$, un germe non nul. Notons $\delta \in \mathbf{C}\{x,y,z\}[1/h - uz^N]/\mathbf{C}\{x,y,z\}$, la classe de $1/h - uz^N$.*

*Alors, à une constante multiplicative près, le polynôme de Bernstein de $\delta z^s$ est égal à $b((s+1)/N - 1)$.*

*Preuve.* • Constatons d'abord que nous pouvons supposer que $h$ appartient à l'idéal de ses dérivées.

Soit $t$ une indéterminée. Posons $H = \exp(t)h$ et notons $\tilde{\delta}$ la classe de $1/H - uz^N$ dans $\mathbf{C}\{x,y,z,t\}[1/H - uz^N]/\mathbf{C}\{x,y,z,t\}$. Comme $(\partial/\partial t)H = H$, il suffit de voir que $b(\tilde{\delta} z^s, s)$ est égal à $b(\delta z^s, s)$. En faisant le changement de coordonnée $z = \exp(-t/N)\tilde{z}$, nous constatons que $b(\delta z^s, s)$ coïncide avec le polynôme de Bernstein de $\exp(t)\tilde{\delta}(\exp(-t/N)z)^s$, donc, d'après le lemme 1.1.1.4, avec celui de $\tilde{\delta} z^s$, comme souhaité.

Nous supposerons donc qu'il existe un opérateur $\chi \in \mathcal{D}$, de degré un, tel que $\chi h^s = sh^s$.

• Montrons que $b(\delta z^s, s)$ divise $b((s+1)/N - 1)$. Remarquons qu'en utilisant l'opérateur $\chi$, l'équation de Bernstein de $h^s$ peut s'écrire :

$$b(\chi) \in \mathcal{D}h + \operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} h^s \; .$$

Par suite :

$$b(\chi + \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial z} z) \in \widetilde{\mathcal{D}} z + \widetilde{\mathcal{D}}(h - uz^N) + \widetilde{\mathcal{D}} \operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} h^s \qquad (5)$$

où $\widetilde{\mathcal{D}}$ désigne l'anneau des opérateurs différentiels $\mathbf{C}\{x, y, z\}\langle \partial/\partial x, \partial/\partial z\rangle$.

Montrons que $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, h^s = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta z^s$. En effet, pour tout opérateur $P \in \mathcal{D}$, de degré $\ell \in \mathbf{N}$, nous avons :

$$Ph^s = \left[\sum_{i=0}^{\ell} s(s-1)\cdots(s-i+1)\frac{p_i}{h^i}\right] h^s$$

et

$$P\frac{1}{h - uz^N} = \sum_{i=0}^{\ell}(-1)^i i! \frac{p_i}{(h-uz^N)^{i+1}}$$

où $p_i \in \mathcal{O}$, $i = 0, \ldots, \ell$. Donc $P(1/h - uz^N)$ appartient à $\mathbf{C}\{x, y, z\}$ si et seulement si $p_0 = \cdots = p_\ell = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $P$ annule $h^s$. L'identité (5) implique alors :

$$b(\chi + \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial z}z) \in \widetilde{\mathcal{D}}z + \mathrm{Ann}_{\widetilde{\mathcal{D}}}\, \delta z^s\ .$$

En constatant que l'opérateur $\chi + (1/N)(\partial/\partial z)z - (s+1)/N + 1$ annule $\delta z^s$, nous en déduisons que $b(\delta z^s, s)$ divise $b((s+1)/N - 1)$.

• Etablissons maintenant la relation réciproque. Soit $\Omega' \subset \mathbf{C}^r$, un voisinage de l'origine sur lequel $h$ est définie. Quitte à le restreindre, nous pouvons supposer qu'en tout point de $\{0\} \times \Omega' \subset \mathbf{C}^{n+r+1}$, le polynôme de Bernstein de la section $\delta z^s$ est un diviseur de $b(\delta z^s, s)$. Comme $u$ est inversible sur un ouvert dense de $\Omega'$, nous sommes donc ramenés à traiter ce cas. Le lemme 1.1.1.4 nous permet alors de supposer que $u = 1$.

Notons $\mathcal{D}'$ l'anneau des opérateurs différentiels $\mathbf{C}\{x, z\}\langle \partial/\partial x, \partial/\partial z\rangle$. L'opérateur $N\chi + z(\partial/\partial z) + N - s$ annulant $\delta z^s$, la relation de Bernstein pour $\delta z^s$ s'écrit :

$$b(\delta z^s, N\chi + z\frac{\partial}{\partial z} + N) \in \mathcal{D}'z + \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}'}\, \delta z^s\ . \tag{6}$$

Soit $P \in \mathcal{D}'$, un opérateur annulant $\delta z^s$. Il s'écrit $P = \sum_{i=0}^{\ell}(\partial/\partial z)^i P_i$, où $P_i \in \mathcal{D}\{z\} = \mathbf{C}\{x, z\}\langle \partial/\partial x\rangle$. En remarquant que $[P, z]$ annule $\delta z^s$, nous en déduisons que $P_0, \ldots, P_\ell$ annulent $\delta z^s$. L'identité (6) se réécrit donc :

$$b(\delta z^s, N\chi + z\frac{\partial}{\partial z} + N) \in \mathcal{D}'z + \mathcal{D}'\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}\{z\}}\, \delta z^s\ . \tag{7}$$

D'autre part, soit $P \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}\{z\}}\, \delta z^s$. Il s'écrit $P = Q(h - z^N) + R$ où $Q \in \mathcal{D}\{z\}$ et $R \in \mathcal{D}[z]$ est de degré en $z$ strictement inférieur à $N$. Remarquons que l'opérateur $R$ annule $\delta z^s$. De plus, constatons que :

$$Rh^s = \left[\sum_{i=0}^{d} s(s-1)\cdots(s-i+1)\frac{r_i}{h^i}\right] h^s$$

et

$$R\frac{1}{h-z^N} = \sum_{i=0}^{d}(-1)^i i! \frac{r_i}{(h-z^N)^{i+1}}$$

où $d = \deg R$ et $r_i \in \mathcal{O}[z]$ est de degré strictement inférieur à $N$ en $z$, pour $i = 0, \dots, d$. En procédant comme plus haut, on montre alors que $R$ annule $h^s$. Aussi l'identité (7) entraîne que :

$$b(\delta z^s, N\chi + z\frac{\partial}{\partial z} + N) \in \mathcal{D}'z + \mathcal{D}'(h - z^N) + \mathcal{D}' \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, h^s \ .$$

Nous en déduisons alors que $b(\delta z^s, N\chi + N - 1)$ appartient à l'idéal $\mathcal{D}h + \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, h^s$. Par suite, $b(\delta z^s, Ns + N - 1)$ est bien un multiple de $b(s)$. Ce qui achève la preuve.

L'obtention de ce résultat fut motivée par l'étude de A. Némethi des revêtements cycliques $X_{h,N}$ associés à un germe $h : (X, x) \to (\mathbf{C}, 0)$, où $(X, x)$ est une singularité de surface normale et $N \in \mathbf{N}^*$. En particulier, si $h : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ définit une singularité isolée, alors $X_{h,N} = \{h(x) = z^N\} \subset \mathbf{C}^3$ et la monodromie de $z : (X_{h,N}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ s'identifie avec la $N^{ème}$ puissance de la monodromie de $f$. Ce qui permet de comprendre la relation entre polynômes de Bernstein obtenue.

# Chapitre 2

# Polynômes de Bernstein d'une déformation sur une intersection complète

Soient $\Omega = X \times Y \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$, un polydisque de centre l'origine, et $\pi_1$ (resp. $\pi_2$) la projection canonique sur $X$ (resp. Y). Notons $\mathcal{D}_{\Omega|Y}$ le faisceau des opérateurs différentiels relatifs à $\pi_2$, et $\mathcal{O}_Y$ celui des fonctions holomorphes sur $Y$. Considérons une fonction $F$ holomorphe sur $\Omega$ s'annulant à l'origine. Posons $Z = F^{-1}(0)$, et $Z' = \pi_1(Z \cap \pi_2^{-1}(0)) \subset X$. Ainsi, $F$ définit une déformation de $Z'$.

On dit que $F$ admet à l'origine un *polynôme de Bernstein générique* s'il existe un polynôme $b(s) \in \mathbf{C}[s]$ et un germe $h \in \mathcal{O}_{Y,0}$ non nuls tels que $h(\underline{y})b(s)F^s \in \mathcal{D}_{\Omega|Y,0}[s]F^{s+1}$. Quand c'est le cas, son *polynôme de Bernstein générique* est le générateur unitaire de l'idéal des polynômes vérifiant cette équation. On le note $b_g(F^s, s)$.

Lorsque l'équation fonctionnelle précédente est réalisée avec $h = 1$, on dit que $F$ admet à l'origine un *polynôme de Bernstein relatif*. Le *polynôme de Bernstein relatif* de $F$ est alors le générateur unitaire de l'idéal constitué de tels polynômes. On le note $b_r(F^s, s)$.

Ces notions furent introduites afin d'étudier comment varient les racines du polynôme de Bernstein lors d'une déformation analytique.

Dans [Ge1], F. Geandier établit l'existence de $b_g(F^s, s)$ quand l'espace des paramètres est de dimension un. Lorsque de plus $F$ définit une déformation à nombre de Milnor constant le long de $Y$, elle montre que $b_r(F^s, s)$ existe, et que $b_g(F^s, s)$ coïncide avec le polynôme de Bernstein de toute fibre $F_{\mathbf{y}} = F(\bullet, \mathbf{y}) \in \mathcal{O}_X$, pour $\mathbf{y} \in Y - \{0\}$ suffisamment proche de l'origine ([Ge2]).

En 1991, J. Briançon, Y. Laurent et Ph. Maisonobe caractérisent l'existence du polynôme de Bernstein relatif :

THÉORÈME ([B.L.M], TH. 3, P. 286) *Avec les notations précédentes, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$F$ admet un polynôme de Bernstein relatif en* $0$.
2. *$X$ est* non caractéristique *pour $\mathcal{O}_\Omega[1/F]$ au voisinage de* $0$.
3. *$\mathcal{O}_\Omega[1/F]$ est $\mathcal{D}_{\Omega|Y}$-cohérent au voisinage de* $0$.
4. *$\mathcal{D}_\Omega[s]F^s$ est $\mathcal{D}_{\Omega|Y}$-cohérent au voisinage de* $0$.

Quand $Z'$ est à singularité isolée en 0, ils établissent que l'existence du polynôme de Bernstein relatif équivaut à ce que $F$ définisse une déformation à nombre de Milnor constant.

Signalons enfin l'article [B.M], où de nombreux exemples sont étudiés.

Dans ce chapitre, nous souhaitons généraliser ces résultats lorsque $X$ est une intersection complète de $\mathbf{C}^n$ au voisinage de l'origine. Nous donnons d'abord des conditions suffisantes sous lesquelles des polynômes de Bernstein génériques existent, adaptant [Bs]. Puis nous traitons le cas des polynômes de Bernstein relatifs, en utilisant les résultats de [B.Gr.M].

## 2.1 Existence du polynôme de Bernstein générique

Nous adaptons ici des travaux de H. Biosca ([Bs]), qui étudie l'existence de polynômes de Bernstein génériques associés à un germe d'application analytique.

### 2.1.1 Analyse du problème

#### Le cadre

Soient $\Omega = \Omega' \times Y \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$, un polydisque ouvert de centre l'origine, et $\pi_1$ (resp. $\pi_2$) la projection canonique sur $\Omega'$ (resp. $Y$). Notons $\mathcal{O}_\Omega$ (resp. $\mathcal{O}_{\Omega'}$, $\mathcal{O}_Y$) le faisceau des fonctions holomorphes sur $\Omega$ (resp. $\Omega'$, $Y$), de fibre à l'origine $\mathcal{O}_{\Omega,0}$ (resp. $\mathcal{O}_{\Omega',0}$, $\mathcal{O}_{Y,0}$), $\mathcal{D}_\Omega$ (resp. $\mathcal{D}_{\Omega'}$) le faisceau des opérateurs différentiels sur $\Omega$ (resp. $\Omega'$), et $\mathcal{D}_{\Omega,0}$ (resp. $\mathcal{D}_{\Omega',0}$) sa fibre à l'origine. Notons aussi $\mathcal{D}_{\Omega|Y} = \mathcal{O}_\Omega\langle\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_k\rangle$, le faisceau des opérateurs différentiels relatifs à la projection $\pi_2$, de fibre à l'origine $\mathcal{D}_{\Omega|Y,0}$.

Considérons $g = (g_1, \ldots, g_p) : \Omega' \to \mathbf{C}^p$, une application analytique non constante, nulle à l'origine, définissant une intersection complète $X' \subset \Omega'$. Notons $X = X' \times Y \subset \Omega$, $\mathcal{R} = R^p\Gamma_X(\mathcal{O}_\Omega)_{alg}$ le $p^{ème}$ groupe de cohomologie locale algébrique de $\mathcal{O}_\Omega$ à support dans $X$. Nous l'identifions à :

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{O}_\Omega\left[1/g_1 \cdots g_p\right]}{\sum_{i=1}^p \mathcal{O}_\Omega\left[1/g_1 \cdots \check{g}_i \cdots g_p\right]}$$

Pour tout $L = (l_1, \ldots, l_p) \in (\mathbf{N}^*)^p$, notons $\delta_L \in \mathcal{R}$, la classe de $1/g_1^{l_1} \cdots g_p^{l_p}$. Constatons que, pour $j = 1, \ldots, k$, l'action de $(\partial/\partial y_j)$ définit un endomorphisme $\pi_1^{-1}\mathcal{D}_{\Omega'}$-linéaire de $\mathcal{R}$. Notons $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$, le sous-faisceau des sections appartenant aux noyaux de tous ces morphismes. Aussi, les sections de $\mathcal{R}'$ sont de la forme $a\delta_L$, avec $a \in \pi_1^{-1}\mathcal{O}_{\Omega'}$ et $L \in (\mathbf{N}^*)^p$. Afin d'éviter toute confusion, nous les noterons $\delta'$.

Considérons une fonction $F$ analytique sur $\Omega$, nulle à l'origine, admettant 0 pour seule valeur critique et telle que la suite $(F, g_1, \ldots, g_p)$ soit $\mathcal{O}_{\Omega,0}$-régulière. Posons $Z = X \cap F^{-1}(0)$.

Ainsi, $F|_X$ est une déformation de la restriction de $f = F(\bullet, 0)$ à $X'$.

DÉFINITION 2.1.1.1 *Soit $\delta$ une section locale non nulle de $\mathcal{R}$. On dit que $\delta F^s$ admet à l'origine un* polynôme de Bernstein générique *s'il existe un polynôme $b(s) \in \mathbf{C}[s]$ et un germe $h \in \mathcal{O}_{Y,0}$ non nuls tels que $h(y)b(s)\delta F^s \in \mathcal{D}_{\Omega|Y,0}[s]\delta F^{s+1}$.* Son polynôme de Bernstein générique *est alors le générateur unitaire de l'idéal formé par les polynômes qui vérifient cette équation. On le note $b_g(\delta F^s, s)$.*

Constatons que, lorsque $\delta \in \mathcal{R}_0$ admet un polynôme de Bernstein générique, des analogues 'génériques' de 1.1.1.3, 1.1.1.4, 1.1.1.6, 1.3.2.1 et 1.3.2.3 sont vrais. En particulier, si $F$ s'annule sur l'espace des paramètres, $b_g(\delta F^s, s)$ est divisible par $(s+r+1)$, où $r \in \mathbf{N}$ est le plus grand entier tel que $\delta \in F^r\mathcal{R}_0$ ; et $\tilde{b}_g(\delta F^s, s)$ désigne alors le quotient de $b_g(\delta F^s, s)$ par $(s + r + 1)$.

De plus, lorsque $g$ est une submersion à l'origine, si $\delta = 1/g_1 \cdots g_p \in \mathcal{R}_0$ admet un polynôme de Bernstein générique, il coïncide avec celui de la restriction de $F$ à $X$ (qui existe alors). Aussi, quand ils existent, les polynômes $b_g(\delta F^s, s)$, $\delta \in \mathcal{R}_0$ non nul, sont appelés à être des polynômes de Bernstein génériques de $F|_X$.

### Analyse du problème

• Commençons par rappeler le schéma de la démonstration de l'existence du polynôme de Bernstein générique pour une fonction holomorphe, donnée par J. Briançon, F. Geandier et Ph. Maisonobe dans ([B.Ge.M, p. 19-22]).

Soit $H$ une fonction holomorphe sur $\Omega$, nulle à l'origine.

**1**. On cherche d'abord des opérateurs $P_j(s) \in \mathcal{D}_{\Omega,0}[s]$, $j = 1, \dots, k$, annulant $H^s$, de la forme :

$$P_j(s) = h(\underline{y}) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)^{d_j} + \sum_{i=1}^{d_j} P_{j,i}(s) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)^{d_j - i}$$

où $h \in \mathcal{O}_{Y,0}$ est un germe non nul, et les $P_{j,i}(s) \in \mathcal{D}_{\Omega,0}[s]$ sont des opérateurs indépendants de $(\partial/\partial y_j)$, de degré au plus $i$, et de degré en $(\partial/\partial y_l)$ strictement inférieur à $i$ pour $l \neq j$. Si $(\underline{x}, \underline{y}, \xi, \eta, s)$ sont des coordonnées sur $T^*\Omega \times \mathbf{C}$, il suffit de trouver des polynômes homogènes $R_j \in \mathcal{O}_{\Omega,0}[\xi, \eta_j, s]$ s'annulant sur la variété caractéristique du $\mathcal{D}_\Omega[s]$-Module cohérent $\mathcal{D}_\Omega[s]H^s$

$$W_H^\sharp = \overline{\{(w, \lambda \mathrm{d}H(w), \lambda H(w)) \mid w \in \Omega,\ \lambda \in \mathbf{C}\}} \subset T^*\Omega \times \mathbf{C}$$

(voir [K1]) de la forme $R_j = \tilde{h}_j \eta_j^{r_j} + \sum_{i=1}^{r_j} R_{j,i}(\xi, s) \eta_j^{r_j - i}$, avec $\tilde{h}_j \in \mathcal{O}_{Y,0}$ non nul, et $R_{j,i} \in \mathcal{O}_{\Omega,0}[\xi, s]$.

**2**. A l'aide de ces opérateurs, on s'efforce d'éliminer les dérivations par rapport aux paramètres dans une identité réalisant un multiple de $b(H^s, s)$. Concrètement, on part de l'équation :

$$b(H^s, s) \cdots b(H^s, s + \ell) H^s = Q H^{s+\ell+1}$$

avec $\ell = \sum_{j=1}^k (d_j - 1)$, obtenue en itérant une identité réalisant le polynôme de Bernstein de $H^s$. Alors, pour un entier $N \in \mathbf{N}$ assez grand, $h^N Q$ s'écrit $h^N Q = \sum_{j=1}^k S_j P_j(s + \ell + 1) + \widetilde{Q}$ où $S_j, \widetilde{Q} \in \mathcal{D}_{\Omega,0}[s]$, et $\widetilde{Q}$ est de degré en $(\partial/\partial y_j)$ au plus $d_j - 1$, $j = 1, \dots, k$, et de degré total inférieur ou égal à celui de $Q$. Cela s'obtient par division. Nous obtenons donc l'identité :

$$(h(\underline{y}))^N b(H^s, s) \cdots b(H^s, s + \ell) H^s = \widetilde{Q} H^{s+\ell+1} \tag{1}$$

En faisant agir les dérivations $(\partial/\partial y_j)$, on constate que le membre de droite appartient à $\mathcal{D}_{\Omega|Y,0}[s] H^{s+1}$.

Par suite, $b_g(H^s, s)$ existe et divise un itéré du polynôme de Bernstein de $H$ à l'origine.

• Nous souhaitons adapter cette méthode à notre situation.

Remarquons d'abord que la variété caractéristique de $\mathcal{R}$ n'est en général pas connue. En conséquence, si $\delta \in \mathcal{R}$ est une section non nulle, la variété caractéristique du $\mathcal{D}_\Omega[s]$-Module cohérent $\mathcal{D}_\Omega[s]\delta F^s$ :

$$\bigcup_{F(X_\alpha) \neq 0} W_{F|X_\alpha}^\sharp = \bigcup_{F(X_\alpha) \neq 0} \overline{\{(w, \xi + \lambda \mathrm{d}F(w), \lambda F(w)) \mid (w, \xi) \in T_{X_\alpha}^* \Omega,\ \lambda \in \mathbf{C}\}}$$

si $\mathrm{car}(\mathcal{D}_\Omega\delta) = \bigcup_\alpha T^*_{X_\alpha}\Omega$ (cf. théorème 1.1.2.4), n'est pas non plus explicite. Il est donc *a priori* peu aisé de donner des conditions suffisantes sur l'application $(F, g)$ pour trouver les opérateurs $P_j$ du type souhaité.

Rappelons des travaux de H. Biosca ([Bs]). Elle étudie l'existence de polynômes de Bernstein génériques associés à une application analytique $(F_1, \ldots, F_r) : \Omega \to \mathbf{C}^r$, polynômes $b(\underline{s}) \in \mathbf{C}[s_1, \ldots, s_r]$ non nuls tels que :

$$h(\underline{y})b(\underline{s})F_1^{s_1} \cdots F_r^{s_r} \in \mathcal{D}_{\Omega|Y,0}[\underline{s}]F_1^{s_1+1} \cdots F_r^{s_r+1}$$

pour un germe $h \in \mathcal{O}_{Y,0}$ non nul. Pour cela, elle adapte la méthode rappelée plus haut, donnant en particulier des conditions suffisantes pour l'existence des opérateurs $P_j(\underline{s})$ annulant $F_1^{s_1} \cdots F_r^{s_r}$. C'est cette fois possible, car la variété caractéristique de $\mathcal{D}_\Omega[\underline{s}]F_1^{s_1} \cdots F_r^{s_r}$ est *suffisamment* explicite :

$$W^\sharp_{(F_1,\ldots,F_r)} = \overline{\left\{ (w, \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathrm{d}F_i(w), \lambda_1 F_1(w), \ldots, \lambda_r F_r(w)) \mid w \in \Omega,\ \underline{\lambda} \in \mathbf{C}^r \right\}}$$

(cf. [B.B.M.M]).

Constatons alors que, si $P(\underline{t}, s) \in \mathcal{D}_{\Omega,0}[t_1, \ldots, t_p, s]$ est un opérateur annulant $g_1^{t_1} \cdots g_p^{t_p} F^s$, pour tout $\textsc{l} \in (\mathbf{N}^*)^p$, $P(\textsc{l}, s)$ annule $\delta_L F^s$. Aussi, lorsque $\mathrm{car}(\mathcal{R})$ est mal connue, nous reprendrons les conditions d'existence d'un polynôme de Bernstein générique associé au morphisme $(g, F)$, obtenues dans [Bs].

Enfin, on peut remarquer que la seconde étape de la méthode indiquée s'adapte mal pour une section quelconque $\delta \in \mathcal{R}$. En effet, si les dérivations $(\partial/\partial y_j)$, $j = 1, \ldots, k$, n'annulent pas $\delta$, on ne peut pas conclure avec l'analogue de l'identité (1). Nous nous limiterons donc aux sections de $\mathcal{R}'$.

### 2.1.2 Résultats généraux

Dans ce paragraphe, nous donnons des conditions suffisantes pour l'existence de polynômes de Bernstein génériques associés à $\delta' F^s$, $\delta' \in \mathcal{R}'$. Suivant l'étude qui précède, nous adapterons les résultats de [Bs].

Nous établissons d'abord un critère d'existence assez général. Nous montrons alors l'existence du polynôme de Bernstein générique lorsque l'espace des paramètres est de dimension un, et lorsque l'application $(F, g)$ est homogène en $\underline{x}$. Enfin, nous introduisons la notion de polynôme de Bernstein générique pour une section de la projection $\pi_2$, dont l'utilité se révèlera par la suite.

**Un critère d'existence**

Introduisons quelques notations.

NOTATIONS

Associons à l'application $(g, F) : \Omega \to \mathbf{C}^{p+1}$ la fonction $\phi : \Omega \times \mathbf{C}^{p+1} \to \mathbf{C}$, définie par $\phi(\underline{x}, \underline{y}, \underline{\lambda}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(\underline{x}) + \lambda_{p+1} F(\underline{x}, \underline{y})$.

Notons $I$ le faisceau d'idéaux $(\phi'_{x_1}, \ldots, \phi'_{x_n}, \lambda_1 \phi'_{\lambda_1}, \ldots, \lambda_{p+1} \phi'_{\lambda_{p+1}}) \mathcal{O}_{\Omega \times \mathbf{C}^{p+1}}$, et $\overline{I}$ sa clôture intégrale. Notons aussi $\mathfrak{Z} \subset \Omega \times \mathbf{C}^{p+1}$, le sous-espace analytique égal à la réunion des supports des faisceaux cohérents $\mathcal{L}_j = (\phi'_{y_j} + \overline{I})/\overline{I}$, $j = 1, \ldots, k$, et $pr_Y$ (resp. $pr_\Omega$) la projection canonique de $\Omega \times \mathbf{C}^{p+1}$ sur $Y$ (resp. $\Omega$). En particulier, $pr_Y = \pi_2 \circ pr_\Omega$.

Donnons maintenant le critère clef sur lequel repose tous les résultats du paragraphe.

PROPOSITION 2.1.2.1 *Avec les notations précédentes, les conditions suivantes sont équivalentes :*

**(i)** *l'ensemble $pr_Y(\mathfrak{Z})$ est contenu dans un sous-espace analytique strict de $Y$ au voisinage de l'origine.*

**(ii)** *il existe $h \in \mathcal{O}_{Y,0}$ non nul tel que $h(\underline{y})\phi'_{y_j} \in \overline{I}_0$ pour $j = 1, \ldots, k$.*

*et entraîne l'existence de $b_g(\delta' F^s, s)$ pour toute section $\delta' \in \mathcal{R}'$. De plus, il existe un entier $\ell \in \mathbf{N}$ tel que $b_g(\delta' F^s, s)$ divise $b(\delta' F^s, s) \cdots b(\delta' F^s, s + \ell)$.*

*Preuve.* La démonstration est une simple adaptation à notre cadre de [Bs, prop. 2], suivant les remarques du paragraphe précédent.

L'équivalence entre les deux conditions résulte de la définition de $\mathfrak{Z}$ et du théorème des zéros de Hilbert.

Montrons comment la condition (ii) permet d'obtenir des opérateurs $P_j \in \mathcal{D}_{\Omega,0}[\underline{t}, s]$ annulant $g_1^{t_1} \cdots g_p^{t_p} F^s$, de la forme $P_j = h^{d_j} (\partial/\partial y_j)^{d_j} + S_j$, où $S_j \in \mathcal{D}_{\Omega,0}[\underline{t}, s]$ est de degré total au plus $d_j$ et de degré en $(\partial/\partial y_i)$ strictement inférieur à $d_j$, pour $i = 1, \ldots, k$.

Les conditions de dépendance intégrale données se traduisent par l'existence de polynômes $R_j \in \mathcal{O}_{\Omega \times \mathbf{C}^{p+1},0}[\xi, \eta_j, \underline{t}, s]$ de la forme $R_j = (h\eta_j)^{r_j} + \sum_{i=1}^{r_j} a_{j,i}(\xi, \underline{t}, s)(h\eta_j)^{r_j - i}$ où $a_{j,i} \in \mathcal{O}_{\Omega \times \mathbf{C}^{p+1},0}[\xi, \underline{t}, s]$ est nul ou homogène de degré $i$, et $R_j(\phi'_x, \phi'_{y_j}, \lambda\phi'_\lambda) = 0$. En considérant les composantes homogènes en $\underline{\lambda}$ dans ces égalités, nous pouvons supposer que les $a_{j,i}$ sont indépendants de $\underline{\lambda}$. Ainsi, les polynômes $R_j \in \mathcal{O}_{\Omega,0}[\xi, \eta_j, \underline{t}, s]$ s'annulent sur le sous-espace analytique de $T^*\Omega \times \mathbf{C}^{p+1}$ :

$$W^\sharp_{(g,F)} = \overline{\{(\underline{x}, \underline{y}, \phi'_x, \phi'_y, \lambda\phi'_\lambda) \mid (\underline{x}, \underline{y}) \in \Omega,\ \underline{\lambda} \in \mathbf{C}^{p+1}\}}$$

qui n'est autre que la variété caractéristique du $\mathcal{D}_\Omega[\underline{t}, s]$-Module cohérent $\mathcal{D}_\Omega[\underline{t}, s]g_1^{t_1} \cdots g_p^{t_p} F^s$ ([B.B.M.M]). En conséquence, il existe des opérateurs $P_j(\underline{t}, s)$ annulant $g_1^{t_1} \cdots g_p^{t_p} F^s$ dont le symbole total est une puissance de $R_j$, donc de la forme souhaitée.

Montrons maintenant que, pour tout $L \in (\mathbf{N}^*)^p$ et tout $a \in \pi_1^{-1}\mathcal{O}_{\Omega'}$, il existe des opérateurs $\widetilde{P}_j(s) \in \mathcal{D}_{\Omega,0}[s]$, $j = 1, \ldots, k$, annulant $a\delta_L F^s$, de la forme $\widetilde{P}_j(s) = h^{\tilde{d}_j}(\partial/\partial y_j)^{\tilde{d}_j} + \widetilde{S}_j$, où $\widetilde{S}_j \in \mathcal{D}_{\Omega,0}[s]$ est de degré total au plus $\tilde{d}_j$, et de degré en $(\partial/\partial y_i)$ strictement inférieur à $\tilde{d}_j$, pour $i = 1, \ldots, k$.

Si $a = 1$, il suffit de poser $\widetilde{P}_j(s) = P_j(L, s)$. Sinon, constatons que $\mathcal{D}_\Omega[s]a\delta_L F^s$ est un sous $\mathcal{D}_\Omega[s]$-Module de $\mathcal{D}_\Omega[s]\delta_L F^s$. Aussi, $\sigma(P_j(L, s))$ s'annule sur $\mathrm{car}_{\mathcal{D}_\Omega[s]}\mathcal{D}_\Omega[s]a\delta_L F^s$. Nous en déduisons l'existence d'opérateurs $\widetilde{P}_j(s)$ annulant $a\delta_L F^s$, et dont le symbole total est une puissance de celui de $P_j(L, s)$, donc de la forme attendue.

Fixons maintenant une section $\delta' \in \mathcal{R}'$, et ses opérateurs $\widetilde{P}_j(s)$ associés, de degré total $\tilde{d}_j$. On conclut alors en procédant comme à la page 46.

Ce qui achève la preuve de la proposition.

Remarquons que ce critère est très grossier, par construction même. En effet, il reste valable pour les sections 'adéquates' de $\mathcal{O}_\Omega[1/g_1 \cdots g_p]$ et de ses $\mathcal{D}_\Omega$-Modules quotients.

### Applications

Nous adaptons ici les résultats [Bs] basés sur le critère précédent.

Proposition 2.1.2.2 *Supposons que l'espace des paramètres est de dimension un. Alors, pour toute section $\delta \in \mathcal{R}'$, le polynôme de Bernstein générique $b_g(\delta F^s, s)$ existe, et divise un itéré de $b(\delta F^s, s)$.*

*Preuve.* D'après le critère valuatif de dépendance intégrale, $y\phi'_y$ est entier sur l'idéal de $\mathcal{O}_{\Omega \times \mathbf{C}^{p+1},0}$ engendré par les $x_i\phi'_{x_i}$ et les $\lambda_i\phi'_{\lambda_i}$ (puisque $\phi = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i\phi'_{\lambda_i}$), donc sur $I_0$. Le résultat est alors une conséquence de la proposition 2.1.2.1.

Ce résultat généralise [Ge1, th. 1]. Rappelons l'énoncé d'une variante du théorème de Bertini idéaliste, fort utile par la suite.

Théorème 2.1.2.3 ([T], p. 597) *Soit $Y \subset \mathbf{C}^k$, un polydisque ouvert. Soit $\varphi(\underline{z}, \underline{y})$ une fonction analytique sur un ouvert de $\mathbf{C}^m \times Y$ telle que $\varphi'_{z_i}$ ne* *soit pas identiquement nulle pour tout $i = 1, \dots, m$. Soit $\sigma$ une section de la projection canonique $\mathbf{C}^m \times Y \to Y$ sur l'image de laquelle $\varphi$ s'annule.*

*Il existe un sous-espace analytique $B \subset \sigma(Y)$ strict, tel que, pour tout $b \in \sigma(Y) - B$, $\varphi'_{y_j}$ est entier sur l'idéal $((z_1 - \sigma_1)\varphi'_{z_1}, \dots, (z_m - \sigma_m)\varphi'_{z_m})\mathcal{O}_{\mathbf{C}^m \times Y, b}$ pour $j = 1, \dots, k$.*

PROPOSITION 2.1.2.4 *Supposons que l'application $g$ soit polynomiale, et que $F$ soit polynomiale en $\underline{x}$ et analytique en les paramètres. Alors, pour toute section $\delta' \in \mathcal{R}'$, le polynôme de Bernstein générique $b_g(\delta' F^s, s)$ existe, et divise un itéré de $b(\delta' F^s, s)$.*

*Preuve.* La démonstration de ce résultat reprend celle de [Bs, prop. 5].

Traitons d'abord le cas particulier où $g_1, \dots, g_p$ et $F$ sont homogènes en $\underline{x}$ de même degré. Etant défini à partir de fonctions homogènes en $\underline{\lambda}$ et en $\underline{x}$, l'espace analytique $\mathfrak{Z}$ est conique dans les fibres de la projection $pr_Y$ (voir [Bs1, cor. 2.6.9, p. 47]). Aussi, $pr_Y(\mathfrak{Z} \cap \{0\} \times Y \times \{0\}) = pr_Y(\mathfrak{Z})$. En appliquant le théorème 2.1.2.3 à $\phi$ et à la section de $pr_Y$ d'image $\{0\} \times Y \times \{0\}$, on constate alors que $pr_Y(\mathfrak{Z})$ est contenu dans un sous-espace strict de $Y$. La proposition 2.1.2.1 permet alors de conclure.

Montrons maintenant le cas général. Soit $T$ une indéterminée et $\alpha \in \mathbf{N}^*$, le degré maximum en $\underline{x}$ des polynômes $g_1, \dots, g_p, F$. Considérons les polynômes homogènes en $(\underline{x}, T)$ définis en posant $\widetilde{F}(\underline{x}, \underline{y}, T) = T^\alpha F(x_1/T, \dots, x_n/T, \underline{y})$, et, pour $i = 1, \dots, p$, $G_i(\underline{x}, T) = T^\alpha g_i(x_1/T, \dots, x_n/T)$. D'après le cas particulier et la démonstration de la proposition 2.1.2.1, il existe des opérateurs $P_j \in \mathcal{D}_{\Omega,0}\{T\}\langle \partial/\partial T \rangle[\underline{t}, s]$ annulant $G_1^{t_1} \cdots G_p^{t_p} \widetilde{F}^s$, de la forme $P_j = h^{d_j}(\partial/\partial y_j)^{d_j} + S_j$, où $h \in \mathcal{O}_{Y,0}$ est non nul, et les $S_j \in \mathcal{D}_{\Omega,0}\{T\}\langle \partial/\partial T \rangle[\underline{t}, s]$ sont de degré total au plus $d_j$ et de degré en $(\partial/\partial y_i)$ strictement inférieur à $d_j$, pour $i = 1, \dots, k$.

Faisons alors quelques réductions. Tout d'abord, remarquons que si $N_j$ est un entier assez grand, $T^{N_j} S_j$ peut être vu comme un opérateur en $T(\partial/\partial T)$ à coefficients dans $\mathcal{D}_{\Omega,0}\{T\}[\underline{t}, s]$. De plus, l'opérateur :

$$\Upsilon = T\frac{\partial}{\partial T} + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \alpha(t_1 + \cdots + t_p + s)$$

annule $G_1^{t_1} \cdots G_p^{t_p} \widetilde{F}^s$. Après divisions des $T^{N_j} S_j$ par $\Upsilon$, on construit alors des opérateurs $\widetilde{R}_j = T^{N_j} h^{d_j} (\partial/\partial y_j)^{d_j} + \widetilde{S}_j \in \mathcal{D}_{\Omega,0}\{T\}[\underline{t}, s]$ annulant $G_1^{t_1} \cdots G_p^{t_p} \widetilde{F}^s$, où $\widetilde{S}_j$ satisfait aux mêmes conditions de degré que $S_j$.

Montrons que l'on peut supposer que les coefficients des opérateurs $\widetilde{S}_j$ sont polynomiaux en $T$. Pour cela, suivant [Bs1, p. 47-48], introduisons une filtration sur $\mathcal{O}_{\Omega,0}\{T\}[\underline{t}, s]$ en donnant le poids 0 (resp. 1) aux variables $\underline{y}$, $\underline{t}$ et $s$

(resp. $\underline{x}$, $T$). Elle induit une notion d'homogénéité sur $\mathcal{O}_{\Omega,0}\{T\}[1/G_1\cdots G_p\widetilde{F}, \underline{t}, s]$ (car l'élément $G_1\cdots G_p\widetilde{F}$ est homogène), et sur $\mathcal{D}_{\Omega,0}\{T\}[\underline{t}, s]$, en donnant le poids 0 (resp. $-1$) aux dérivations par rapport aux paramètres (resp. aux variables $\underline{x}$), dans l'écriture unique des opérateurs avec coefficients à gauche. Le résultat clef est :

> *Si $Q_m \in \mathcal{D}_{\Omega,0}[T, \underline{t}, s]$ est un opérateur homogène de degré $m \in \mathbf{Z}$, alors $Q_m G_1^{t_1}\cdots G_p^{t_p}\widetilde{F}^s = uG_1^{t_1}\cdots G_p^{t_p}\widetilde{F}^s$ où $u \in \mathcal{O}_{\Omega,0}[T, 1/G_1\cdots G_p\widetilde{F}, \underline{t}, s]$ est nul ou homogène de degré $m$.*

En conséquence, si $\widetilde{S}_j^{(N_j)}$ désigne la composante de $\widetilde{S}_j$ de degré $N_j$, alors $\widetilde{R}^{(N_j)} = T^{N_j}h^{d_j}(\partial/\partial y_j)^{d_j} + \widetilde{S}_j^{(N_j)}$ est un opérateur de $\mathcal{D}_{\Omega,0}[T, \underline{t}, s]$ qui annule $g_1^{t_1}\cdots g_p^{t_p}\widetilde{F}^s$, de la forme souhaitée.

Par suite, en spécialisant $T$ en 1 dans $\widetilde{R}^{(N_j)}$, nous obtenons enfin des opérateurs de $\mathcal{D}_{\Omega,0}[\underline{t}, s]$ qui annulent $g_1^{t_1}\cdots g_p^{t_p}F^s$ et ayant la forme espérée.

On conclut alors en procédant comme dans la preuve de la proposition 2.1.2.1.

### Polynôme de Bernstein générique le long d'une section de $\pi_2$

Nous étudions ici une notion voisine de celle de polynôme de Bernstein générique. Nous gardons les notations introduites au début du paragraphe 2.1.2.

DÉFINITION 2.1.2.5 *Soit $\sigma : Y \to \Omega$ une section de $\pi_2$. On dit que $\delta F^s$, $\delta \in \mathcal{R}$, admet un* polynôme de Bernstein générique le long de $\sigma$ *s'il existe une fonction analytique $h \in \mathcal{O}_\Omega$ définie au voisinage de l'origine, ne s'annulant pas sur l'image de $\sigma$, et un polynôme $b(s) \in \mathbf{C}[s]$ non nul, tels que $h(\underline{x}, \underline{y})b(s)\delta F^s \in \mathcal{D}_{\Omega|Y,0}[s]\delta F^{s+1}$.* Son polynôme de Bernstein générique le long de $\sigma$ *est alors le générateur unitaire de l'idéal formé par les polynômes qui vérifient cette équation. On le note $b_\sigma(\delta F^s, s)$.*

REMARQUE 2.1.2.6 Constatons que cette notion ne présente un intérêt que si l'image de $\sigma$ est contenue dans *l'espace singulier relatif de $Z$*, lieu $\Gamma \subset \Omega$ des zéros de $g_1, \ldots, g_p, F$, et des mineurs relatifs $\Delta_K^g(F)$ de la matrice jacobienne de $(F, g)$ (en accord avec les notations introduites à la page 84). Cela résulte des relations $F\delta F^s = \delta F^{s+1}$, $g_i^N\delta F^s = g_i^N\delta F^{s+1} = 0$ pour $N$ assez grand, et

$$(s+1)\Delta_K^g(F)\delta_L F^s = \Delta_K^g\delta_L F^{s+1}$$

L'existence de ces polynômes s'obtient grâce à la méthode utilisée aux paragraphes précédents.

Proposition 2.1.2.7 *Pour toute section $\sigma : Y \to \Omega$ de $\pi_2$, tout $\delta' \in \mathcal{R}'$ admet un polynôme de Bernstein générique le long de $\sigma$. De plus, $b_\sigma(\delta' F^s, s)$ divise un itéré de $b(\delta' F^s, s)$.*

*Preuve.* Nous reprenons ici la démonstration de [Bs1, prop. 2.7.3, p. 51].

En utilisant le théorème 2.1.2.3 (avec la fonction $\phi$), on constate que $\mathfrak{Z}$ ne contient pas $\sigma(Y) \times \{0\}$. D'autre part, il résulte de la conicité de $\mathfrak{Z}$ dans les fibres de $pr_\Omega$ que $pr_\Omega(\mathfrak{Z})$ est isomorphe à $\mathfrak{Z} \cap \{\lambda = 0\}$. Aussi $pr_\Omega(\mathfrak{Z})$ est un sous-espace analytique de $\Omega$ qui ne contient pas $\sigma(Y)$. Il existe donc un germe de fonction $h \in \mathcal{O}_{\Omega,0}$ s'annulant sur $pr_\Omega(\mathfrak{Z})$ mais pas sur $\sigma(Y)$. Par suite, pour $N \in \mathbf{N}$ assez grand, $h^N \phi'_{y_j} \in \overline{I}_0$ pour $j = 1, \ldots, k$. On conclut alors en procédant comme à la proposition 2.1.2.1.

Constatons que des analogues de 1.1.1.3, 1.1.1.6, 1.1.1.4 et 1.3.2.1 sont vrais. En particulier, si l'image de $\sigma$ est contenue dans $\Gamma$ et si $b_\sigma(\delta F^s, s)$ existe, il est alors divisible par $(s + r + 1)$, où $r \in \mathbf{N}$ est le plus grand entier tel que $\delta \in F^r \mathcal{R}_0$.

### 2.1.3 Le cas d'une déformation sur une singularité isolée

Au paragraphe 2.1.1, nous avons vu qu'une bonne connaissance de la variété caractéristique de $\mathcal{R}$ est nécessaire pour une approche directe du problème de l'existence de polynômes de Bernstein génériques associés aux sections locales de $\mathcal{R}$.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que l'application $g : \Omega' \to \mathbf{C}^p$ définit une intersection complète à singularité isolée à l'origine. Cela va nous permettre d'affiner le critère d'existence donné à la proposition 2.1.2.1. Nous montrons alors l'existence du polynôme de Bernstein générique de $\delta' F^s$, $\delta' \in \mathcal{R}'$ non nul, lorsque $(F, g)$ définit la déformation d'une singularité isolée, généralisant ainsi [B.Ge.M, prop. 1.2]. De plus, $b_g(\delta' F^s, s)$ est alors le ppcm des polynômes $b_\sigma(\delta' F^s, s)$ définis au paragraphe précédent.

Quitte à restreindre $\Omega'$, nous pouvons supposer que l'origine est le seul point singulier de $g$ (le cas $g$ submersion à l'origine relève de la théorie classique, d'après l'analogue générique du lemme 1.1.1.6). Nous avons alors :

$$\mathrm{car}(\mathcal{R}) = T^*_X \Omega \cup T^*_{\{0\} \times Y} \Omega$$

Supposons de plus que $F$ s'annule sur l'espace des paramètres. Il résulte alors du théorème 1.1.2.4 que pour toute section $\delta \in \mathcal{R}$ non nulle, la variété caractéristique de $\mathcal{D}_\Omega[s]\delta F^s$ est l'espace analytique $W^\sharp_{F|X}$, adhérence dans $T^*\Omega \times \mathbf{C}$ de l'ensemble :

$$\{(\underline{x}, \underline{y}, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathrm{d}g_i(\underline{x}) + \lambda_{p+1}\mathrm{d}F(\underline{x}, \underline{y}), \lambda_{p+1}F(\underline{x}, \underline{y})) \mid g(\underline{x}) = 0,\ \underline{\lambda} \in \mathbf{C}^{p+1}\}$$

Aussi nous allons pouvoir donner un critère d'existence plus adapté à notre situation. Introduisons d'abord de nouvelles notations.

NOTATIONS

Rappelons que $I$ est l'idéal $(\phi'_{x_1}, \ldots, \phi'_{x_n}, \lambda_1\phi'_{\lambda_1}, \ldots, \lambda_{p+1}\phi'_{\lambda_{p+1}})\mathcal{O}_{\Omega\times\mathbf{C}^{p+1}}$ où $\phi(\underline{x}, \underline{y}, \underline{\lambda}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(\underline{x}) + \lambda_{p+1}F(\underline{x}, \underline{y})$. Posons $J = (g_1, \ldots, g_p)\mathcal{O}_{\Omega\times\mathbf{C}^{p+1}}$.

Notons $\widetilde{\mathfrak{Z}} \subset \Omega \times \mathbf{C}^{p+1}$, l'espace analytique réunion des supports des faisceaux d'idéaux cohérents $\mathcal{L}_j = (\phi'_{y_j} + \overline{I} + J)/\overline{I} + J$, $j = 1, \ldots, k$. Constatons que $\overline{I} + J = \overline{(\phi'_{x_1}, \ldots, \phi'_{x_n}, \lambda_{p+1}F)\mathcal{O}_{\Omega\times\mathbf{C}^{p+1}}} + J$.

PROPOSITION 2.1.3.1 *Supposons que l'application $g$ définit une singularité isolée au voisinage de l'origine et que $F$ s'annule sur l'espace des paramètres. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- **(i)** *l'ensemble $pr_Y(\widetilde{\mathfrak{Z}})$ est contenu dans un sous-espace analytique strict de $Y$ au voisinage de l'origine.*
- **(ii)** *il existe $h \in \mathcal{O}_{Y,0}$ non nul tel que $h(\underline{y})\phi'_{y_j} \in \overline{I}_0 + J_0$ pour $j = 1, \ldots, k$.*

*et entraîne l'existence de $b_g(\delta' F^s, s)$ pour toute section $\delta' \in \mathcal{R}'$. De plus, il existe un entier $\ell \in \mathbf{N}$ tel que $b_g(\delta' F^s, s)$ divise $b(\delta' F^s, s) \cdots b(\delta' F^s, s+\ell)$.*

*Preuve.* La démonstration est très similaire à celle de la proposition 2.1.2.1. En effet, la condition (ii) s'écrit $h\phi'_{y_j} - v_j \in \overline{I}_0$, où $v_j \in J_0$, $j = 1, \ldots, k$. Il existe alors des polynômes $R_j \in \mathcal{O}_{\Omega\times\mathbf{C}^{p+1},0}[\xi, \eta_j, s]$ de la forme $R_j = (h\eta_j)^{r_j} + \sum_{i=1}^{r_j} a_{j,i}(\xi, s)(h\eta_j)^{r_j - i}$ où $a_{j,i} \in \mathcal{O}_{\Omega\times\mathbf{C}^{p+1},0}[\xi, s]$ est nul ou homogène de degré $i$, tels que $R_j(\phi'_x, \phi'_{y_j}, \lambda_{p+1}\phi'_{\lambda_{p+1}}) \in J_0$. En considérant les composantes homogènes en $\underline{\lambda}$, nous pouvons supposer que $R_j \in \mathcal{O}_{\Omega,0}[\xi, \eta_j, s]$. Il suffit alors de constater que les polynômes $R_j$ s'annulent sur $W^\sharp_{F|X}$, c'est-à-dire sur la variété caractéristique des $\mathcal{D}_\Omega[s]$-Modules $\mathcal{D}_\Omega[s]\delta' F^s$, $\delta' \in \mathcal{R}'$ non nulle.

La proposition suivante généralise [B.Ge.M, prop. 1.2].

PROPOSITION 2.1.3.2 *Soit $\Omega = \Omega' \times Y \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$, un polydisque centré à l'origine. Soient $g = (g_1, \ldots, g_p) : \Omega' \to \mathbf{C}^p$ et $(f, g) : \Omega' \to \mathbf{C}^{p+1}$, des applications analytiques, nulles à l'origine, définissant des intersections complètes $X'$ et $Z'$ à singularité isolée. Soit $F : \Omega \to \mathbf{C}$, une déformation analytique de $f$ s'annulant sur l'espace des paramètres. Notons $Z \subset \Omega$, l'espace défini par $(F, g)$. Alors, pour toute section locale $\delta' \in \mathcal{R}'$, le polynôme de Bernstein générique $b_g(\delta' F^s, s)$ existe. De plus, $b_g(\delta' F^s, s)$ divise un itéré de $b(\delta' F^s, s)$.*

*Preuve.* Nous adaptons la démonstration de [Bs, prop. 4].

Remarquons d'abord que $\widetilde{\mathfrak{Z}}$ est un espace analytique conique dans les fibres de la projection canonique $pr_\Omega : \Omega \times \mathbf{C}^{p+1} \to \Omega$, étant défini à l'aide d'éléments homogènes en $\underline{\lambda}$ (voir [Bs1, cor. 2.5.9, p. 47]). Aussi, il y a un isomorphisme entre $pr_\Omega(\widetilde{\mathfrak{Z}})$ et $\widetilde{\mathfrak{Z}} \cap \{\underline{\lambda} = 0\}$, qui munit $pr_\Omega(\widetilde{\mathfrak{Z}})$ d'une structure de sous-espace analytique de $\Omega$.

Montrons maintenant que $pr_Y(\widetilde{\mathfrak{Z}}) = \pi_2(pr_\Omega(\widetilde{\mathfrak{Z}}))$ est un sous-espace analytique de $Y$. Notons $\Gamma \subset \Omega$, le lieu critique de la restriction de $\pi_2$ à $Z$. Constatons que si $w \notin \Gamma$, la fibre de l'idéal $I + J$ au point $(w, 0)$ contient $\lambda_{p+1}$. En effet, c'est patent si $w \notin Z$. Puis, si $w$ appartient à $Z$ sans être un point critique de $\pi_2|_Z$, il existe un $(p+1)\times(p+1)$-mineur relatif de la matrice jacobienne de $(g, F)$ non nul en $w$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que c'est le mineur construit sur les $(p+1)$ premières colonnes. Nous déduisons alors de l'identité :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_{p+1}} & \frac{\partial F}{\partial x_{p+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi'_{x_1} \\ \vdots \\ \phi'_{x_{p+1}} \end{pmatrix}$$

que $\lambda_{p+1}$ appartient à $I_{(w,0)}$. D'où l'assertion sur $\Gamma$.

En particulier, si $w \notin \Gamma$, alors $\phi'_{y_j} \in I_{(w,0)} + J_{(w,0)}$ pour tout $j = 1, \ldots, k$. D'où l'inclusion $pr_\Omega(\widetilde{\mathfrak{Z}}) \subset \Gamma$. D'autre part, il résulte des hypothèses que $\pi_2|_\Gamma$ est un morphisme fini. D'après le théorème de Grauert, $pr_Y(\widetilde{\mathfrak{Z}}) = \pi_2|_\Gamma(pr_\Omega(\widetilde{\mathfrak{Z}}))$ est donc bien un sous-espace analytique de $Y$.

Montrons enfin que $pr_Y(\widetilde{\mathfrak{Z}}) \subset Y$ est un sous-espace strict. Supposons le contraire. Il existe donc une composante $C$ de dimension $k$ dans $pr_\Omega(\widetilde{\mathfrak{Z}})$. La restriction de $\pi_2$ à $C$ est alors un revêtement analytique de $Y$. A l'aide d'une section $\tau$ de $\pi_2|_C$, on construit une section $\sigma$ de $pr_Y|_{C\times\mathbf{C}^{p+1}}$ sur un ouvert dense de $Y$, en posant $\sigma(\underline{y}) = (\tau(\underline{y}), 0)$. La fonction $\phi = \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i + \lambda_{p+1} F$ s'annulant sur l'image de $\sigma$, il résulte du théorème 2.1.2.3 qu'en tout point $(w, 0)$ d'un ouvert dense de l'image de $\sigma$, $\phi'_{y_j} \in \overline{I}_{(w,0)}$ pour tout $j = 1, \ldots, k$. Ce qui constitue une contradiction.

On conclut alors grâce à la proposition 2.1.3.1.

REMARQUE 2.1.3.3 Faisons l'hypothèse que toute sous-famille de $(g_1, \dots, g_p, f)$ détermine une intersection complète à singularité isolée. Alors, une preuve analogue - mais utilisant cette fois le critère donné à la proposition 2.1.2.1 - établit l'existence de $b_g(\delta' F^s, s)$ pour toute déformation $F$ de $f$ (voir [Bs, prop. 4]).

• Dans ce qui suit, nous supposerons vérifiées les hypothèses sur $g$ et $(f, g)$ données à la proposition précédente.

Notons $\Gamma \subset \Omega$, le lieu singulier relatif de $Z$, lieu des zéros de $g_1, \dots, g_p, F$ et des $\Delta_K^g(F)$. La restriction à $\Gamma$ de la projection $\pi_2$ étant finie, notons aussi $\Gamma_\alpha$, les composantes de $\Gamma$ de dimension $k$. A toute composante $\Gamma_\alpha$, associons enfin la section $\sigma_\alpha : Y \to \Omega$.

D'après la proposition 2.1.2.7, pour tout $\delta' \in \mathcal{R}'$, $b_{\sigma_\alpha}(\delta' F^s, s)$ existe. Appelons les *polynômes de Bernstein génériques de la déformation $Z$ le long de* $\Gamma_\alpha$, généralisant ainsi une notion introduite dans [B.Ge.M].

Montrons alors la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1.3.4 *Pour tout* $L \in (\mathbf{N}^*)^p$, $b_g(\delta_L F^s, s)$ *est le* ppcm *des polynômes de Bernstein* $b_{\sigma_\alpha}(\delta_L F^s, s)$ *lorsque* $\Gamma_\alpha$ *parcourt l'ensemble des composantes irréductibles de* $\Gamma$ *de dimension* $k$.

*Preuve.* Nous reprenons la preuve de [B.Ge.M, prop. 1.4, p. 23-24].

Fixons $L \in (\mathbf{N}^*)^p$. Constatons d'abord qu'aucun germe $h \in \mathcal{O}_{Y,0}$ non nul ne peut être identiquement nul sur une composante $\Gamma_\alpha$ de dimension $k$, finie au dessus de $Y$. Aussi, $b_g(\delta_L F^s, s)$ est un multiple de tous les polynômes $b_{\sigma_\alpha}(\delta_L F^s, s)$.

Réciproquement, pour tout $\alpha$, soit $h_\alpha \in \mathcal{O}_{Y,0}$, un germe non identiquement nul sur $\Gamma_\alpha$ tel que :

$$h_\alpha(\underline{x}, \underline{y}) b_{\sigma_\alpha}(\delta_L F^s, s) \delta_L F^s \in \mathcal{D}_{\Omega|Y,0}[s] \delta_L F^{s+1} \qquad (2)$$

L'idéal engendré par les fonctions $h_\alpha, g_1, \dots, g_p$, $F$ et les $\Delta_K^g(F)$ définit alors un sous-espace analytique de $\Gamma$ de dimension strictement inférieure à $k$. Il existe donc un germe $h \in \mathcal{O}_{Y,0}$, non nul, appartenant à cet idéal. Notons $c(s) \in \mathbf{C}[s]$, le ppcm des polynômes $b_{\sigma_\alpha}(\delta_L F^s, s)$. On déduit aisément des relations (2) et de celles de la remarque 2.1.2.6 que $h^N c(s) \delta_L F^s \in \mathcal{D}_{\Omega|Y,0}[s] \delta_L F^{s+1}$ pour un entier $N \in \mathbf{N}^*$ assez grand. Ce qui achève la démonstration.

## 2.2 Polynôme de Bernstein relatif d'une fonction sur une intersection complète

Reprenons les notations introduites au paragraphe 2.1.1.

Dans cette section, nous nous efforçons de caractériser l'existence du polynôme de Bernstein relatif pour les sections $\delta F^s$, $\delta \in \mathcal{R}$. La base de cette étude est l'article [B.Gr.M].

### 2.2.1 Le cas général

Détaillons le contenu de ce paragraphe.

Après avoir précisé le cadre, nous rappelons des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de polynôme de Bernstein relatifs pour toute section locale non nulle d'un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome régulier $\mathcal{M}$, établies dans [B.Gr.M]. Puis nous faisons le point sur les relations de divisibilité entre les divers polynômes de Bernstein que l'on peut associer à notre situation.

#### Cadre et résultats

Soient $\Omega = \Omega' \times Y \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$, un polydisque ouvert de centre l'origine, et $\pi_2 : \Omega \to Y$, la projection canonique. Gardons les notations introduites au début du paragraphe 2.1.1 pour désigner les faisceaux usuels associés à cette projection : $\mathcal{O}_\Omega$, $\mathcal{O}_{\Omega'}$, $\mathcal{O}_Y$, $\mathcal{D}_\Omega$, $\mathcal{D}_{\Omega'}$ et $\mathcal{D}_{\Omega|Y}$.

Considérons $g = (g_1, \ldots, g_p) : \Omega' \to \mathbf{C}^p$, une application analytique nulle à l'origine, définissant une intersection complète $X' \subset \Omega'$. Notons $X = X' \times Y \subset \Omega$, $\mathcal{R} = R^p\Gamma_X(\mathcal{O}_\Omega)_{alg}$ le $p^{ème}$ groupe de cohomologie locale algébrique de $\mathcal{O}_\Omega$ à support dans $X$. Nous l'identifions à :

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{O}_\Omega\,[1/g_1 \cdots g_p]}{\sum_{i=1}^{p} \mathcal{O}_\Omega\,[1/g_1 \cdots \check{g}_i \cdots g_p]}$$

Rappelons que c'est un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome régulier. Remarquons qu'il est engendré comme $\mathcal{D}_{\Omega|Y}$-Module par la section $1/(g_1 \cdots g_p)^l$ pour $l \in \mathbf{N}$ assez grand. Cela résulte (par exemple) du fait que $1/(g_1 \cdots g_p)^l$ engendre $\mathcal{O}_\Omega[1/g_1 \cdots g_p]$ pour tout $l$ assez grand (proposition 1.1.2.10). En particulier, $\mathcal{R}$ est $\mathcal{D}_{\Omega|Y}$-cohérent.

Considérons une fonction $F$ analytique sur $\Omega$, nulle à l'origine, admettant 0 pour seule valeur critique et telle que la suite $(F, g_1, \ldots, g_p)$ soit $\mathcal{O}_{\Omega,0}$-régulière. Posons $Z = X \cap F^{-1}(0)$.

Ainsi, $F|_X$ est une déformation de la restriction de $f = F(\bullet, 0)$ à $X'$.

DÉFINITION 2.2.1.1 *Soit $\delta \in \mathcal{R}$ une section locale non nulle. On dit que $\delta F^s$ admet à l'origine un* polynôme de Bernstein relatif *s'il existe un polynôme non nul $b(s) \in \mathbf{C}[s]$ tel que $b(s)\delta F^s \in \mathcal{D}_{\Omega|Y,0}[s]\delta F^{s+1}$.* Son polynôme de Bernstein relatif *est alors le générateur unitaire de l'idéal des polynômes qui vérifient cette équation. On le note $b_r(\delta F^s, s)$.*

Constatons que, lorsque $\delta \in \mathcal{R}$ admet un polynôme de Bernstein relatif, des analogues 'relatifs' de 1.1.1.3, 1.1.1.4, 1.1.1.6, 1.3.2.1 et 1.3.2.3 sont vrais. En particulier, $b_r(\delta F^s, s)$ est divisible par $(s + r + 1)$, où $r \in \mathbf{N}$ est le plus grand entier tel que $\delta \in F^r\mathcal{R}$ ; et $\tilde{b}_r(\delta F^s, s)$ désigne alors le quotient de $b_r(\delta F^s, s)$ par $(s + r + 1)$.

De plus, lorsque $g$ est une submersion à l'origine, et $\delta = \dot{1}/g_1 \cdots g_p \in \mathcal{R}$ admet un polynôme de Bernstein relatif, il coïncide avec celui de la restriction de $F$ à $X$ (qui existe alors). Aussi, quand ils existent, les polynômes $b_r(\delta F^s, s)$, $\delta \in \mathcal{R} - \{0\}$, sont appelés à être des polynômes de Bernstein relatifs de $F|_X$.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome régulier. A l'aide d'une version relative de la $V$-filtration de Malgrange-Kashiwara, J. Briançon, M. Granger et Ph. Maisonobe établissent des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un polynôme de Bernstein relatif pour $mF^s$, $m \in \mathcal{M}$, lorsque $\mathcal{M}$ est aussi un $\mathcal{D}_{\Omega|Y}$-Module cohérent engendré par un sous $\mathcal{O}_\Omega$-Module cohérent. Sans perte de généralité, énonçons leurs résultats pour $\mathcal{M} = \mathcal{R}$ :

THÉORÈME 2.2.1.2 ([B.L.M], [B.GR.M], TH. 1, P. 231) *Les propriétés suivantes sont équivalentes (au voisinage de 0) :*

1. *pour toute section locale $\delta \in \mathcal{R}$ non nulle, $\delta F^s$ admet un polynôme de Bernstein relatif.*

2. *la projection $\pi_2$ est* non caractéristique *pour $\mathcal{R}[1/F]$ au voisinage de tout $x_0 \in F^{-1}(0)$ :*

$$\mathrm{car}(\mathcal{R}[1/F]) \cap T^*_{\pi_2^{-1}(\pi_2(x_0))}\Omega \subset T^*_\Omega\Omega$$

3. *$\mathcal{R}[1/F]$ est $\mathcal{D}_{\Omega|Y}$-cohérent.*

4. *pour toute section locale $\delta \in \mathcal{R}$, la projection $\pi_2$ est non caractéristique pour $\mathcal{D}_\Omega[s]\delta F^s$ au voisinage de tout $x_0 \in F^{-1}(0)$ :*

$$\mathrm{car}_{\mathcal{D}_\Omega}\,\mathcal{D}_\Omega[s]\delta F^s \cap T^*_{\pi_2^{-1}(\pi_2(x_0))}\Omega \subset T^*_\Omega\Omega$$

5. *pour toute section locale $\delta \in \mathcal{R}$ non nulle, $\mathcal{D}_\Omega[s]\delta F^s$ est $\mathcal{D}_{\Omega|Y}$-cohérent au voisinage de $F^{-1}(0)$.*

Z. Mebkhout nous a fait observer que l'on pouvait éviter l'usage de la $b$-fonction contrôlée dans la preuve du théorème de [B.L.M] qui est utilisé pour établir ce résultat.

Proposition 2.2.1.3 ([B.Gr.M], pr. 7, p. 226) *Supposons satisfaites les propriétés équivalentes du théorème précédent. Soient $\delta \in \mathcal{R}$, une section locale non nulle, et $b(\delta F^s, s)$, le polynôme de Bernstein (absolu) de $\delta F^s$. Il existe $\ell \in \mathbf{N}$ tel que :*

1. *$b(\delta F^s, s)$ divise $b_r(\delta F^s, s)$.*

2. *$b_r(\delta F^s, s)$ divise $b(\delta F^s, s)b(\delta F^s, s+1)\cdots b(\delta F^s, s+\ell)$.*

Ces résultats généralisent 'idéalement' la théorie classique (voir le théorème énoncé en début de chapitre).

### Relations de divisibilité entre polynômes de Bernstein

Reprenons les notations introduites aux pages 44 et 45.

Dans ce paragraphe, nous faisons le point sur les relations entre les divers polynômes de Bernstein de $\delta F^s$, $\delta \in \mathcal{R}$ non nul, lorsque $F \in \mathcal{O}_\Omega$ est une déformation à $k$ paramètres.

• Soit $\delta' \in \mathcal{R}'$. Il est patent que, si $b_r(\delta' F^s, s)$ existe, alors, pour tout $\mathbf{y} \in Y$ assez petit, $b(\delta' F^s_{\mathbf{y}}, s)$ divise $b_r(\delta' F^s, s)$. De même, pour tout $\mathbf{y} \in Y$ assez général, $b_g(\delta' F^s, s)$ est un multiple de $b(\delta' F^s_{\mathbf{y}}, s)$. Il est donc légitime de considérer $b_g(\delta' F^s, s)$ et $b_r(\delta' F^s, s)$ pour étudier les polynômes de Bernstein des fibres d'une déformation.

• Rappelons que lorsque l'existence de $b_g(\delta' F^s, s)$ résulte de l'un des critères du paragraphe 2.1, $b_g(\delta' F^s, s)$ divise $b(\delta' F^s, s)\cdots b(\delta' F^s, s+\ell)$ pour un entier $\ell \in \mathbf{N}$. D'après la proposition 2.2.1.3, la même remarque peut être faite pour le polynôme $b_r(\delta F^s, s)$, $\delta \in \mathcal{R}$. En particulier, cela établit la rationnalité de leurs racines (voir proposition 1.3.1.3).

• Soit $\delta \in \mathcal{R}$. Lorsque $b_r(\delta F^s, s)$ existe, c'est bien sûr un multiple de $b(\delta F^s, s)$ et de $b_g(\delta F^s, s)$ (qui existe alors). Nous avons en fait le résultat suivant :

PROPOSITION 2.2.1.4 *Supposons satisfaites les conditions équivalentes du théorème 2.2.1.2. Soit $\delta \in \mathcal{R}_0$, un germe non nul. Il y a les relations de divisibilité suivantes :*

$$b(\delta F^s, s) \to b_g(\delta F^s, s) \to b_r(\delta F^s, s) \to b(\delta F^s, s) \cdots b(\delta F^s, s+\ell)$$

*pour un entier $\ell \in \mathbf{N}$, où 'a $\to$ b' signifie que a divise b.*

*Preuve.* Il suffit de voir que $b_g(\delta F^s, s)$ est un multiple de $b(\delta F^s, s)$, les autres relations ayant déjà été obtenues (voir proposition 2.2.1.3). Nous adaptons la méthode développée dans [Ge2, th. 7.4, p. 160].

Etablissons d'abord un résultat préliminaire. Pour tout $j = 1, \dots, k$, considérons la suite croissante indexée par $l \in \mathbf{N}$ des sous $\mathcal{D}_{\Omega|Y,0}$-modules de $\mathcal{D}_{\Omega|Y,0}[s]\delta F^s$ engendrés par $(\partial/\partial y_j)^i \delta F^s$, $i = 0, \dots, l$. Le $\mathcal{D}_{\Omega|Y}$-Module $\mathcal{D}_\Omega[s]\delta F^s$ étant cohérent par hypothèse, cette suite stationne. Pour $j = 1, \dots, k$, il existe donc des opérateurs $P_j \in \mathcal{D}_{\Omega,0}$, unitaires de degré $d_j$ en $(\partial/\partial y_j)$, à coefficients dans $\mathcal{D}_{\Omega|Y,0}$, et qui annulent $\delta F^s$.

Considérons maintenant une équation fonctionnelle réalisant $b_g(\delta F^s, s)$ :

$$h(\underline{y}) b_g(\delta F^s, s)\delta F^s = Q\delta F^{s+1} \tag{3}$$

où $Q \in \mathcal{D}_{\Omega|Y,0}$ et $h \in \mathcal{O}_{Y,0}$ est un germe non nul. L'assertion étant manifeste si $h$ est inversible, nous supposerons donc que $h(0) = 0$. Par divisions euclidiennes de $Q$ par les $P_j$, nous avons :

$$\mathcal{D}_{\Omega,0}[s]\delta F^s = \left[\sum_{\alpha<d} \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)^{\alpha_k} \mathcal{D}_{\Omega|Y,0}[s]\right] \delta F^s$$

la somme étant prise sur les multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbf{N}^k$ tels que $\alpha_j < d_j$ pour $j = 1, \dots, k$. Il y a donc une inclusion $h^N \mathcal{D}_{\Omega,0}[s]\delta F^s \subset \mathcal{D}_{\Omega,0}[s] h \delta F^s$ où $N = \sum_{j=1}^k (d_j - 1) + 1$. En multipliant par $b_g(\delta F^s, s)$ les membres de cette équation, puis en utilisant (3), nous obtenons l'identité :

$$u(\underline{y}) b_g(\delta F^s, s)\mathcal{D}_{\Omega,0}[s]\delta F^s \subset \mathcal{D}_{\Omega,0}[s]\delta F^{s+1} \tag{4}$$

où $u = h^N \in \mathcal{O}_{Y,0}$. Remarquons que, $h$ étant non inversible, il existe un monôme non nul $u_\beta y_1^{\beta_1} \cdots y_k^{\beta_k} \in \mathcal{O}_{Y,0}$, $u_\beta \in \mathbf{C}^*$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbf{N}^k$, $|\beta| > 0$, apparaissant dans $u$, de valuation minimale en $y_1, \dots, y_k$. Faisons alors opérer $(\partial/\partial y_j)$ :

$$u_j'(\underline{y}) b_g(\delta F^s, s)\mathcal{D}_{\Omega,0}[s]\delta F^s + u(\underline{y}) b_g(\delta F^s, s)\frac{\partial}{\partial y_j}\mathcal{D}_{\Omega,0}[s]\delta F^s \subset \frac{\partial}{\partial y_j}\mathcal{D}_{\Omega,0}[s]\delta F^{s+1}$$

Grâce à l'équation (4), nous en déduisons que $u'_j b_g(\delta F^s, s)\mathcal{D}_{\Omega,0}[s]\delta F^s$ est contenu dans $\mathcal{D}_{\Omega,0}[s]\delta F^{s+1}$. En faisant opérer $(\partial/\partial y_1)^{\beta_1}\cdots(\partial/\partial y_k)^{\beta_k}$, puis en multipliant par un inversible de $\mathcal{O}_{Y,0}$, nous obtenons donc l'inclusion de $b_g(\delta F^s, s)\mathcal{D}_{\Omega,0}[s]\delta F^s$ dans $\mathcal{D}_{\Omega,0}[s]\delta F^{s+1}$. En conséquence, $b_g(\delta F^s, s)$ est bien un multiple de $b(\delta F^s, s)$.

Constatons qu'il est aisé de retrouver l'existence du polynôme de Bernstein relatif pour les sections $\delta' \in \mathcal{R}'$ lorsque la condition *5* du théorème 2.2.1.2 est vérifiée. En effet, il suffit d'adapter le second point page 46, en utilisant les opérateurs construits au début de la preuve de la proposition précédente.

### 2.2.2 Déformations équisingulières

Rappelons qu'une déformation à un paramètre d'un germe de fonction à singularité isolée admet un polynôme de Bernstein relatif si et seulement si c'est une déformation à nombre de Milnor constant au dessus de l'axe des paramètres ([B.L.M, th. 4]).

Nous cherchons ici à généraliser cet énoncé.

#### Le cadre

Soient $\Omega = \Omega' \times Y \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$, un polydisque ouvert de centre l'origine, et $\pi_2 : \Omega \to Y$, la projection canonique. Gardons les notations introduites en début de chapitre pour désigner les faisceaux usuels associés à cette projection.

Considérons $g = (g_1, \ldots, g_p) : \Omega' \to \mathbf{C}^p$, une application analytique nulle en 0, définissant $X' \subset \Omega'$, une intersection complète dont le lieu singulier n'est pas vide. Notons $X = X' \times Y \subset \Omega$ et $\mathcal{R} = R^p\Gamma_X(\mathcal{O}_\Omega)_{alg}$ le $p^{ème}$ groupe de cohomologie locale algébrique de $\mathcal{O}_\Omega$ à support dans $X$.

Rappelons que $\mathcal{R}$ est un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome régulier, $\mathcal{D}_{\Omega|Y}$-cohérent (voir p. 56). En particulier, la projection $\pi_2$ est non caractéristique pour $\mathcal{R}$ ([B.L.M, th. 1]).

Soit $F : \Omega \to \mathbf{C}$, une fonction holomorphe, nulle à l'origine, admettant 0 pour seule singularité, et telle que la suite $(F, g_1, \ldots, g_p)$ soit $\mathcal{O}_{\Omega,0}$-régulière. Posons $Z = X \cap F^{-1}(0) \subset \Omega$. Pour tout $\mathbf{y} \in Y$, notons $Z_{\mathbf{y}} \subset \Omega'$, la projection de $Z \cap \pi_2^{-1}(\mathbf{y}) \subset \Omega$ sur $\Omega'$. Notons aussi $Z' = Z_0$. Ainsi, $Z$ est une déformation à un paramètre de $Z'$.

Rappelons que si $h : (\Theta, x_0) \to (\mathbf{C}^r, 0)$ est un germe d'application analytique définissant une intersection complète à singularité isolée, alors pour $\varepsilon \in \mathbf{R}^{*+}$ assez petit, pour toute valeur régulière $\eta \in \mathbf{C}^r$ de $h$ telle que $0 < |\eta| \ll \varepsilon$, la fibre $h^{-1}(\eta) \cap \{x \in \mathbf{C}^n \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$ a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères de dimension $n - p$. Le nombre de ces sphères est appelé *nombre de Milnor* de $h^{-1}(0)$ en $x_0$ (cf. [Ha], [Mn]). On le note $\mu(h^{-1}(0), x_0)$.

DÉFINITION 2.2.2.1 *On dit que $Z$ définit une* déformation de $Z'$ à $\mu$-constant (au dessus de $Y$) *s'il existe une section de $\pi_2$ continue :*

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & Y & \longrightarrow & Z \\ & \mathbf{y} & \longmapsto & (\sigma_1(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \end{array}$$

*telle que $\sigma(0) = 0$ et, quitte à réduire $\Omega$, pour tout $\mathbf{y} \in Y$, $Z_{\mathbf{y}}$ ait une singularité isolée en $\sigma_1(\mathbf{y})$ dont le nombre de Milnor est égal à celui de $Z'$ à l'origine.*

Soit enfin $\mathcal{P}$ le $(p+1)^{ème}$ groupe de cohomologie locale algébrique de $\mathcal{O}_\Omega$ à support dans $Z = X \cap F^{-1}(0)$. Considérons la suite exacte de $\mathcal{D}_\Omega$-Modules

$$0 \to \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}[1/F] \longrightarrow \mathcal{P} \to 0 \qquad (1)$$

La projection $\pi_2$ étant non caractéristique pour $\mathcal{R}$, nous déduisons de cette suite exacte que la condition :

*6. la projection $\pi_2$ est non caractéristique pour $\mathcal{P}$ au voisinage de* 0.

est équivalente aux conditions du théorème 2.2.1.2. Rappelons que cette condition s'exprime aussi :

*le covecteur $d_0 y = (0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0, 1)$ n'appartient pas à* $\mathrm{car}(\mathcal{P})$.

C'est cette formulation qui sera utile par la suite.

### Rappels sur les stratifications

Nous rappelons ici quelques définitions bien connues relatives aux stratifications d'espaces analytiques (cf. [Mr] par exemple).

Soient $\Theta \subset \mathbf{C}^n$ un voisinage de l'origine, $H$ une fonction holomorphe sur $\Theta$, et $V \subset \Theta$ un sous-ensemble analytique réduit. Dans ce paragraphe, nous noterons $T^*_{H|_V}\Theta$ l'espace conormal relatif à la restriction de $H$ à $V$, défini par

$$T^*_{H|_V}\Theta = \overline{\{(x, \xi + \lambda \mathrm{d}H(x)) \mid (x, \xi) \in T^*_V\Theta,\ \lambda \in \mathbf{C}\}} \subset T^*\Theta\ .$$

Remarquons que si $H$ s'annule sur $V$, alors $T^*_{H|_V}\Theta = T^*_V\Theta$.

Si $\pi$ désigne la projection canonique de $T^*\Theta$ sur $\Theta$, pour tous sous-ensembles $W \subset \Theta$ et $T \subset T^*\Theta$, $T|_W$ désigne l'ensemble $T \cap \pi^{-1}(W)$.

Une *stratification* de $V$ est une partition de $V$ localement finie $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ en sous-variétés lisses connexes $V_\alpha$ dont l'adhérence $\overline{V_\alpha}$ est un espace analytique. On demande de plus que, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, $\overline{V_\alpha} - V_\alpha$ soit une réunion de strates.

On dit que la stratification $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ satisfait à la condition (a) de Whitney si pour tout couple de strates incidentes $(V_\alpha, V_\beta)$, $V_\alpha \subset \overline{V_\beta}$ :

$$T^*_{\overline{V}_\beta}\Theta|_{V_\alpha} \subset T^*_{V_\alpha}\Theta$$

On dit que la stratification $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ satisfait à la condition $(\mathrm{a}_H)$ de Thom si pour tout couple de strates incidentes $(V_\alpha, V_\beta)$, $V_\alpha \subset \overline{V_\beta}$ :

$$T^*_{H|_{\overline{V}_\beta}}\Theta|_{V_\alpha} \subset T^*_{H|_{V_\alpha}}\Theta$$

Remarquons enfin que lorsque $H$ s'annule sur $V_\beta$, la condition $(\mathrm{a}_H)$ se réduit à la condition (a).

### Les résultats

Dans [B.Gr.M], les auteurs s'intéressent au module de cohomologie locale algébrique sur une intersection complète dont le lieu singulier est de dimension un. Nous reprenons ici leur étude dans notre cas particulier, en précisant les résultats.

PROPOSITION 2.2.2.2 *Avec les notations précédentes, supposons que $Z'$ soit une intersection complète de $\Omega'$ à singularité isolée en $0$ et que $\{0\} \times Y$ soit le lieu singulier de $Z$. Alors les conditions 1 à 6 du théorème 2.2.1.2 et de la page 61 sont équivalentes à :*

*7. $Z$ est une déformation de $Z'$ à $\mu$-constant le long de son lieu singulier.*

*Preuve.* Notons $\mu_0$ le nombre de Milnor de $Z'$ en $0$ et $\mu(Z_{\mathbf{y}}; 0)$ le nombre de Milnor en $0$ de la fibre $Z_{\mathbf{y}}$, $\mathbf{y} \in Y$. Sous nos hypothèses, J. Briançon, M. Granger et Ph. Maisonobe calculent ([B.Gr.M, pr. 8, p. 235]) le cycle caractéristique de $\mathcal{P}$ au voisinage de $0$ à l'aide de la formule de l'indice de Kashiwara :

$$\mathrm{Car}(\mathcal{P}) = m_0 T^*_{\{0\}}\Omega + m_1 T^*_{\{0\}\times Y}\Omega + T^*_Z\Omega \qquad (2)$$

où $m_0 = \mu'_0 - \sum \mu'_i$, différence du nombre de Milnor en 0 de la section hyperplane générique et de la somme des nombres de Milnor des points singuliers de la section affine générique voisine, et $m_1 \in \mathbf{N}$. Si $d_0y$ n'est pas limite d'hyperplans tangents à $Z$, ils montrent qu'alors $m_0 = \mu_0 - \mu(Z_{\mathbf{y}_0}; 0)$ pour $\mathbf{y}_0 \in Y$ voisin de 0. Donc la condition *6* équivaut à :

$$m_0 = 0 \ \text{ et } \ d_0y \notin T^*_Z\Omega$$

et l'implication *6* $\Rightarrow$ *7* est patente. Montrons la réciproque.

Etudions les nombres de Milnor des sections affines de $Z$ en un point de $\{0\} \times Y$. On considère le morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \mathbf{C}^n & \longrightarrow & \mathbf{C}^{n+1} \\ (\underline{x}, y, \underline{a}) & \longmapsto & (y - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \underline{a}) \end{array}$$

Notons $\Phi : Z \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{n+1}$, sa restriction à $Z \times \mathbf{C}^n$. Pour tout $(z, \underline{a}) \in \mathbf{C}^{n+1}$, posons $Z_{z,a}$ la projection de $\Phi^{-1}(z, \underline{a})$ sur $\Omega'$, qui s'identifie à $Z \cap \{y = a_1x_1 + \cdots a_nx_n + z\}$. En particulier, $Z_{\mathbf{y},0} = Z_{\mathbf{y}}$ pour tout $\mathbf{y} \in Y$.

L'hypothèse s'écrit :

$$\mu_0 = \mu(Z_{\mathbf{y},0}; 0) \text{ pour } \mathbf{y} \text{ voisin de } 0 \tag{3}$$

D'après [Loo, lem. 2.2, p. 22], il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon'$, $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$, la sphère $S_{\varepsilon'} \subset \mathbf{C}^n$, de centre l'origine et de rayon $\varepsilon'$, est transverse à $Z'$. Ainsi, $S_{\varepsilon'} \times \mathbf{C}^{n+1}$ est transverse à la fibre spéciale $\Phi^{-1}(0,0) = Z' \times \{0\}$. Par ouverture de la transversalité, il existe donc $\eta, \alpha \in \mathbf{R}^+$ petits tels que, pour tout $(z, \underline{a}) \in D_{\eta,\alpha}$, $Z_{z,a}$ soit transverse à $S_{\varepsilon'}$, $\varepsilon' \leq \varepsilon$, où $D_{\eta,\alpha}$ désigne l'ensemble des couples $(z, \underline{a}) \in \mathbf{C}^{n+1}$ tels que $|z| \leq \eta$ et $|\underline{a}| = |a_1| + \cdots + |a_n| \leq \alpha$.

Ainsi, pour tout $(z, \underline{a}) \in D_{\eta,\alpha}$, $Z_{z,a} \cap B_\varepsilon$ est à singularité isolée ($B_\varepsilon$ est la boule ouverte de $\mathbf{C}^n$ de centre 0 et de rayon $\varepsilon$). Par semi-continuité du nombre de Milnor en 0, nous avons :

$$\mu_0 \geq \sum_{x \in B_\varepsilon} \mu(Z_{z,a}; x) \text{ pour tout } (z, \underline{a}) \in D_{\eta,\alpha} \tag{4}$$

En particulier :

$$\mu_0 \geq \mu(Z_{0,a}; 0) \text{ pour } |\underline{a}| \leq \alpha \tag{5}$$

De plus, la semi-continuité du nombre de Milnor pour la famille $(Z_{z,a})_{|z| \leq \eta}$, $\underline{a}$ fixé, $|\underline{a}| \leq \alpha$, entraîne que :

$$\mu(Z_{0,a}; 0) \geq \mu(Z_{z,a}; 0) \text{ pour } |z| \leq \eta \tag{6}$$

Montrons que, pour $\mathbf{y} \in Y - \{0\}$ général et tout $\underline{a} \in \mathbf{C}^n$, $\mu(Z_{\mathbf{y},a}; 0)$ est égal à $\mu(Z_{\mathbf{y},0}; 0)$. Considérons la stratification $\{Z - \{0\} \times Y, \{0\} \times Y - \{0\}, \{0\}\}$ de $Z$. Elle se raffine en une stratification satisfaisant aux conditions de Whitney ([W]). Nous en déduisons que celles-ci sont satisfaites sur un ouvert de Zariski de $\{0\} \times Y - \{0\}$. Donc, puisque $Y$ est de dimension un, quitte à restreindre $Y$, on peut supposer que $\{Z - \{0\} \times Y, \{0\} \times Y - \{0\}, \{0\}\}$ est de Whitney. En particulier la stratification $\{(Z - \{0\} \times Y) \times \mathbf{C}^n, (\{0\} \times Y - \{0\}) \times \mathbf{C}^n, \{0\} \times \mathbf{C}^n\}$ l'est aussi.

Considérons alors la projection :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^{2n+1} & \longrightarrow & \mathbf{C}^{n+1} \\ (\underline{x}, y, \underline{a}) & \longmapsto & (y + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \underline{a}) \end{array}$$

et notons $\pi$ sa restriction à $Z \times \mathbf{C}^n$. Comme c'est une submersion en tout point $M$ de coordonnées $(0, y, \underline{a})$, par le premier lemme d'isotopie de Thom-Mather, il existe des voisinages $V$ de $M$ et $W = \pi(V)$ de $\pi(M)$ et un homéomorphisme stratifié $h$ tels que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} (V \cap \pi^{-1}(\pi(M))) \times W \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "pr_2"'] & & V \arrow[dl, "\pi"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Or $\pi^{-1}(\pi(M))$ s'identifie à $Z_{\mathbf{y},a}$. D'autre part, le nombre de Milnor est invariant par homéomorphisme. Ainsi l'application de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{N}$, $\underline{a} \mapsto \mu(Z_{\mathbf{y},a}; 0)$, est constante (car localement constante sur $\mathbf{C}^n$) pour tout $\mathbf{y} \in Y - \{0\}$ assez général. Par suite :

$$\mu(Z_{\mathbf{y},a}; 0) = \mu(Z_{\mathbf{y},0}; 0) \text{ pour tout } \underline{a} \in \mathbf{C}^n, \ \mathbf{y} \in Y - \{0\} \text{ générique} \qquad (7)$$

En jouxtant les identités (3) à (7), nous en déduisons que, pour $(z, \underline{a}) \in D_{\eta,\alpha}$, $Z_{z,a}$ a l'origine pour seule singularité dans $B_\varepsilon$, avec le nombre de Milnor $\mu_0$.

En particulier, $\mu_0$ est le nombre de Milnor de la section hyperplane générique de $Z$ passant par 0 et de celle voisine de 0. Nous déduisons alors de l'identité (2) qu'il n'y a pas le conormal à l'origine dans car$(\mathcal{P})$ :

$$\mathrm{car}(\mathcal{P}) = T^*_{\{0\}\times Y}\Omega \cup T^*_Z\Omega \qquad (8)$$

D'autre part, pour tout $|\underline{a}| \leq \alpha$, le lieu singulier relatif à la fonction sur $Z \cap B_\varepsilon$, $(\underline{x}, y) \mapsto y - \sum_{i=1}^n a_i x_i$, est donc l'axe $\{0\} \times Y$ :

$$B_\varepsilon \cap \{M \in Z - \{0\} \times Y \mid (M; -a_1, \dots, -a_n, 1) \in T^*_Z\Omega\} = \emptyset$$

Donc

$$(\underline{0}; a_1, \ldots, a_n, 1) \notin T^*_Z\Omega \text{ pour } |\underline{a}| < \alpha. \tag{9}$$

Nous déduisons de l'identité (8) que $(\underline{0}; a_1, \ldots, a_n, 1)$ n'appartient pas à $\mathrm{car}(\mathcal{P})$ pour $|\underline{a}| < \alpha$. En particulier, $d_0 y$ est non caractéristique pour $\mathcal{S}$. Ce qui achève la preuve de la proposition.

REMARQUE 2.2.2.3 • Plus généralement, si on suppose que le lieu singulier de $Z$ est une courbe lisse au dessus de $Y$, la même démonstration établit l'équivalence entre les propriétés *1* à *6* et la propriété *7*.

• Par contre, on ne sait pas conclure si on suppose seulement que $\mathrm{Sing}(Z)$ est une courbe. En effet, les conditions *1* à *5* impliquent alors que $Z$ est une famille *"à $\Sigma\,\mu$ constant"*. En général, on ignore si cela implique la condition *6*.

EXEMPLE
Prenons $n = 3$, $p = 1$, $F(\underline{x}, y) = x_1^2 + yx_2 + x_3^3$, $g(\underline{x}) = x_1^4 - x_2^2$. Alors $X = g^{-1}(0) \subset \mathbf{C}^4$ et $Z = X \cap F^{-1}(0)$ ont pour lieu singulier le 2-plan d'équations $x_3 = x_2 = 0$ et l'axe des $y$ respectivement. De plus, $Z'$ est une intersection complète à singularité isolée en 0. D'autre part, pour tout $\mathbf{y}$ fixé, $F_{\mathbf{y}} = F(\bullet, \mathbf{y})$ et $g$ sont des polynômes de $\mathbf{C}[\underline{x}]$ quasi-homogènes pour le système $\alpha = (3, 6, 2)$, de degré constant indépendant de $\mathbf{y}$. Par la formule de M. Giusti ([Gs]), $Z_{\mathbf{y}}$ a donc un nombre de Milnor en 0 constant pour tout $\mathbf{y}$ assez petit. On déduit de la proposition précédente l'existence d'un polynôme de Bernstein relatif pour toute section locale $\delta \in \mathcal{R}$ non nulle.

REMARQUE 2.2.2.4 Constatons que si l'axe $\{0\} \times Y$ est contenu dans $Z$, quitte à réduire $\Omega$, la condition $T^*_Z\Omega|_{\{0\}\times Y} \subset T^*_{\{0\}\times Y}\Omega$ peut s'écrire :

$$\text{pour tout } \underline{a} \in \mathbf{C}^n, \text{ le covecteur } (\underline{0}; \underline{a}, 1) \text{ n'appartient pas à } T^*_Z\Omega$$

Du fait de l'identité (9) de la proposition précédente, il est donc légitime de se demander si la stratification $\{Z - \{0\} \times Y, \{0\} \times Y\}$ de $Z$ satisfait à la condition (a) de Whitney lorsque $Z$ est une déformation à $\mu$-constant le long de $\{0\} \times Y$.

Donnons un cas dans lequel la réponse est positive.

Soient $h = (h_1, \ldots, h_r) : \Omega' \to \mathbf{C}^r$, une application semi-quasi-homogène pour un système de poids $\beta \in (\mathbf{Q}^{*+})^n$ (voir 4.1.1.6), et $H = (H_1, \ldots, H_r) : \Omega \to \mathbf{C}^r$, une déformation de $h$ telle que, pour tout $\mathbf{y} \in Y$ voisin de 0, l'application $(H_1(\bullet, \mathbf{y}), \ldots, H_r(\bullet, \mathbf{y}))$ est semi-quasi-homogène pour le système

$\beta$, et la partie initiale de $H_i(\bullet, \mathbf{y})$ a même degré que celle de $h_i$, $i = 1, \ldots, r$. Notons $\widetilde{Z} \subset \Omega$ (resp. $\widetilde{Z}' \subset \Omega'$), le lieu des zéros de $H$ (resp. $h$). Rappelons que le nombre de Milnor d'un germe semi-quasi-homogène $V(u_1, \ldots, u_l)$ coïncide avec celui de $V(\mathrm{in}(u_1), \ldots, \mathrm{in}(u_l))$ (4.1.1.8). Aussi, d'après la formule de M. Giusti ([Gs]), $\widetilde{Z}$ est une déformation de $\widetilde{Z}'$ à $\mu$-constant le long de $Y$.

Remarquons alors que pour tout $z \in Y$ et tout $\underline{a} \in \mathbf{C}^n$, nous avons $\mathrm{in}(H_i(\underline{x}, z + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)) = \mathrm{in}(H_i(\underline{x}, z))$. En conséquence, toute section hyperplane de $\widetilde{Z}$ transverse à $Y$ a même nombre de Milnor. On conclut de la même façon qu'à la fin de la preuve de la proposition précédente que, pour tout $\underline{a} \in \mathbf{C}^n$, le covecteur $(\underline{0}; \underline{a}, 1)$ n'appartient pas à $T^*_{\widetilde{Z}}\Omega$. En d'autres termes, la stratification $\{\widetilde{Z} - \{0\} \times Y, \{0\} \times Y\}$ de $\widetilde{Z}$ satisfait bien à la condition (a).

Le résultat suivant précise [B.Gr.M, th. 2] dans un cas particulier.

THÉORÈME 2.2.2.5 *Soit $\Omega = \Omega' \times Y \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$, un polydisque centré en l'origine. Soient $g = (g_1, \ldots, g_p) : \Omega' \to \mathbf{C}^p$ et $(f, g) : \Omega' \to \mathbf{C}^{p+1}$, des applications analytiques, nulles à l'origine, définissant des intersections complètes $X'$ et $Z'$ à singularité isolée. Soit enfin $F : \Omega \to \mathbf{C}$, une déformation de $f$. Notons $Z \subset \Omega$, l'espace défini par $(F, g)$, et $X = X' \times Y \subset \Omega$. Les conditions du théorème 2.2.1.2 et de la page 61 sont équivalentes à :*

7. *$Z$ est une déformation de $Z'$ à $\mu$-constant le long de l'axe $\{0\} \times Y$.*
8. *$\{X - Z, Z - \{0\} \times Y, \{0\} \times Y\}$ est une stratification de $X$ satisfaisant à la condition $(\mathrm{a}_F)$ de Thom.*

*Preuve.* • L'implication *7* ⇒ *6* résulte de la proposition 2.2.2.2. La réciproque est démontrée dans [B.Gr.M]. Rappelons les grandes lignes de sa preuve.

Par hypothèse, $\mathrm{Sing}(Z)$ est une courbe $\Gamma$. Du calcul du cycle caractéristique de $\mathcal{P}$ et de la condition *6*, on déduit que, quitte à réduire $\Omega$, $Z$ est une déformation à $\Sigma\,\mu$ constant le long de $\Gamma$ :

$$\mu(Z'; 0) = \sum_{x \in \mathrm{Sing}(Z_{\mathbf{y}})} \mu(Z_{\mathbf{y}}; x)$$

pour tout $\mathbf{y} \in Y$ voisin de 0, et que $F$ s'annule sur $\mathrm{Sing}(X)$. Comme $X = X' \times Y$, il vient :

$$\sum_{x \in \mathrm{Sing}(Z_{\mathbf{y}})} (\mu(Z_{\mathbf{y}}; x) + \mu(X \cap \pi_2^{-1}(\mathbf{y}); x)) \text{ constante pour } \mathbf{y} \text{ voisin de } 0$$

On déduit alors de la formule de Greuel-Lê que la multiplicité d'intersection du discriminant de $(g_1, \dots, g_p, F, y)$ avec $Z'$ est constante le long de $Y$. Par un théorème de Looijenga ([Loo, 7.6, p. 117]), nous en déduisons que, pour $\mathbf{y} \in Y$ voisin de 0, $\mathrm{Sing}(Z_{\mathbf{y}})$ est réduit à un point. Puisque $\mathrm{Sing}(X) = \{0\} \times Y$ est contenu dans $\mathrm{Sing}(Z)$, $Z$ est donc bien une déformation de $Z'$ à $\mu$-constant le long de l'axe $\{0\} \times Y$.

• Montrons l'implication *8* $\Rightarrow$ *2*. Sous notre hypothèse, nous avons en particulier $T^*_{F|_X}\Omega|_{Z-\{0\}\times Y} \subset T^*_{Z-\{0\}\times Y}\Omega$ et $T^*_{F|_X}\Omega|_{\{0\}\times Y} \subset T^*_{\{0\}\times Y}\Omega$, d'où l'inclusion $T^*_{F|_X}\Omega|_Z \subset T^*_{Z-\{0\}\times Y}\Omega \cup T^*_{\{0\}\times Y}\Omega$.

D'autre part, remarquons que $T^*_{F|_X}\Omega|_Z = T^*_{F|_X}\Omega|_{F^{-1}(0)}$. Il s'ensuit que $\pi_2$ est non caractéristique pour $T^*_{F|_X}\Omega|_{F^{-1}(0)}$, donc pour $\mathcal{R}[1/F]$ puisque d'après [B.M.M, th. 3.4.2, p. 539] (qui reformule [Gn, th. 3.3, p. 352]) :

$$\mathrm{car}(\mathcal{R}[1/F]) = T^*_X\Omega \cup T^*_{F|_X}\Omega|_{F^{-1}(0)} \tag{10}$$

D'où la condition *2*.

• Pour montrer *2* $\Rightarrow$ *8*, le seul point délicat à établir est l'inclusion :

$$T^*_{F|_X}\Omega|_{\{0\}\times Y} \subset T^*_{\{0\}\times Y}\Omega \ , \tag{11}$$

La condition $(\mathrm{a}_F)$ étant vérifiée génériquement sur l'axe $\{0\} \times Y$ ([Hi]), quitte à restreindre $\Omega$ nous pouvons supposer que :

$$T^*_{F|_X}\Omega|_{\{0\}\times Y-\{0\}} \subset T^*_{\{0\}\times Y}\Omega \tag{12}$$

Constatons aussi que lorsque $p = n-1$, l'assertion est un cas particulier du lemme 2.2.2.6 (puisque alors $Z = \{0\} \times Y$).

Nous supposerons donc que $p < n-1$. En particulier, $T^*_{F|_X}\Omega$ est irréductible de dimension $n+2$.

Notons $(x, y; \xi, \eta)$ les coordonnées sur $T^*\Omega$. Remarquons que si $F'_y$ s'annule sur $X$, l'identité (11) est vérifiée, l'espace $T^*_{F|_X}\Omega$ étant alors contenu dans l'hyperplan $\{\eta = 0\}$. Supposons donc que ce ne soit pas le cas. Considérons alors l'espace $S = T^*_{F|_X}\Omega|_{F_y'^{-1}(0)} \subset T^*\Omega$, dont les composantes irréductibles sont de dimension pure $n+1$ (d'après le théorème de l'idéal principal).

Notons $\pi$ la projection canonique de $T^*\Omega$ sur $\Omega$. Soit $C$ une composante irréductible de $S$. Distinguons trois cas :

- soit $\pi(C) = \{0\} \times Y$. D'après l'identité (12), l'espace $T^*_{\{0\}\times Y}\Omega$ contient alors $C|_{\{0\}\times Y-\{0\}}$. Par suite, la composante $C$ est contenue dans $T^*_{\{0\}\times Y}\Omega$.

- soit $\pi(C) = \{0\}$. Pour des raisons de dimension, $C$ est nécessairement l'espace conormal $T^*_{\{0\}}\Omega$. Ce qui est exclu, puisque il résulte de l'identité (10) et de l'hypothèse que $T^*_{\{0\}}\Omega$ n'est pas contenu dans $T^*_{F|_X}\Omega|_{F^{-1}(0)}$.

- soit $\pi(C) \not\subset \{0\} \times Y$. Montrons que $C|_{X-\{0\}\times Y}$ est contenu dans l'hyperplan $\{\eta = 0\}$. Soient $(x_0, y_0) \in X - \{0\} \times Y$, un point en lequel $F'_y$ s'annule, et $(x_0, y_0; \xi_0, \eta_0)$ un élément de $T^*_{F|_X}\Omega$. Constatons que la condition *7* entraîne que l'idéal de $\mathcal{O}_\Omega$ engendré par $g_1, \ldots, g_p$, et les mineurs maximaux de la matrice jacobienne de $(F, g)$, est supporté par l'axe des paramètres (voir page 81). En particulier, il existe un mineur maximal $\Lambda \in \mathcal{O}_\Omega$ de la jacobienne de $(F, g)$ tel que $\Lambda(x_0, y_0)$ est non nul. Nous en déduisons que $(\xi_0, \eta_0)$ s'écrit $(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathrm{d}_x g_i(x_0) + \lambda_0 \mathrm{d}_x F(x_0, y_0), \lambda_0 F'_y(x_0, y_0))$, où $\lambda_i \in \mathbf{C}$, $i = 0, \ldots, p$, le complexe $\eta_0$ étant en particulier nul.

Ainsi, l'hyperplan $\{\eta = 0\}$ contient $C|_{X-\{0\}\times Y}$, donc aussi $C|_X$ ; en particulier, $C|_{\{0\}\times Y} \subset T^*_{\{0\}\times Y}\Omega$.

En conséquence, $S|_{\{0\}\times Y} = T^*_{F|_X}\Omega|_{\{0\}\times Y}$ est contenu dans $T^*_{\{0\}\times Y}\Omega$, comme souhaité.

Ce qui achève la preuve du théorème.

En particulier, sous les hypothèses du théorème précédent, lorsque $Z$ est une déformation de $Z'$ à $\mu$-constant le long de l'axe $\{0\} \times Y$, la stratification $\{Z - \{0\} \times Y, \{0\} \times Y\}$ vérifie la condition (a) (voir la remarque 2.2.2.4).

Au lemme suivant, nous donnons des conditions équivalentes à *8* dans un cadre plus général.

LEMME 2.2.2.6 *Soit $\Omega = \Omega' \times Y \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$, un polydisque centré en l'origine. Soient $g = (g_1, \ldots, g_p) : \Omega' \to \mathbf{C}^p$ et $(f, g) : \Omega' \to \mathbf{C}^{p+1}$, des applications analytiques, nulles à l'origine, définissant des intersections complètes $X'$ et $Z'$ à singularité isolée. Soient $G = (G_1, \ldots, G_p) : \Omega \to \mathbf{C}^p$ et $(F, G) : \Omega \to \mathbf{C}^{p+1}$ des applications analytiques définissant des déformations $X, Z \subset \Omega$ de $X', Z'$ à $\mu$-constant le long de l'axe $\{0\} \times Y$.*

*Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- **(i)** *La stratification $\{Z - \{0\} \times Y, \{0\} \times Y\}$ vérifie la condition* (a).
- **(ii)** *Les stratifications $\{Z - \{0\} \times Y, \{0\} \times Y\}$ et $\{X - \{0\} \times Y, \{0\} \times Y\}$ vérifient la condition* (a).
- **(iii)** *La stratification $\{X - \{0\} \times Y, \{0\} \times Y\}$ vérifie la condition* ($\mathrm{a}_F$).

*Preuve.* Nous noterons encore $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{P}$), le module de cohomologie locale de $\mathcal{O}_\Omega$ à support $X$ (resp. $Z$). Constatons que sous nos hypothèses, $T^*_{F|_X}\Omega|_{F^{-1}(0)}$ est l'espace $T^*_Z\Omega \cup T^*_{\{0\}\times Y}\Omega$.

En effet, d'après le début de la preuve de la proposition 2.2.2.2, $\mathrm{car}(\mathcal{R}) = T^*_{\{0\}\times Y}\Omega \cup T^*_X\Omega$ et $\mathrm{car}(\mathcal{P}) = T^*_{\{0\}\times Y}\Omega \cup T^*_Z\Omega$. L'assertion résulte alors de la suite exacte (1) page 61 et de l'identité (10) page 67.

L'équivalence entre les conditions **(i)** et **(iii)** s'en déduit aisément. Par suite, l'implication **(iii)** $\Rightarrow$ **(ii)** résulte du fait que la condition $(\mathrm{a}_F)$ pour $\{X - \{0\} \times Y, \{0\} \times Y\}$ implique la condition (a). D'où le résultat.

En particulier, si $(G_1, \ldots, G_{n-1})$ définit une famille de courbes à $\mu$-constant le long de l'axe $\{0\} \times Y$, et s'il existe une fonction $F : \Omega \to \mathbf{C}$ telle que $Z = X \cap F^{-1}(0) = \{0\} \times Y$, alors la stratification $\{X - \{0\} \times Y, \{0\} \times Y\}$ vérifie la condition (a).

Comme application du lemme précédent, retrouvons le résultat de la remarque 2.2.2.4.

Soient $h = (h_1, \ldots, h_r) : \Omega' \to \mathbf{C}^r$, une application semi-quasi-homogène pour un système de poids $\beta \in (\mathbf{Q}^{*+})^n$, et $H = (H_1, \ldots, H_r) : \Omega \to \mathbf{C}^r$, une déformation de $h$ telle que, pour tout $\mathbf{y} \in Y$ voisin de 0, l'application $(H_1(\bullet, \mathbf{y}), \ldots, H_r(\bullet, \mathbf{y}))$ soit semi-quasi-homogène pour le système $\beta$, et que la partie initiale de $H_i(\bullet, \mathbf{y})$ coïncide avec celle de $h_i$, $i = 1, \ldots, r$. Notons $\widetilde{Z} \subset \Omega$ (resp. $\widetilde{Z}' \subset \Omega'$), le lieu des zéros de $H$ (resp. $h$). D'après la formule de M. Giusti ([Gs]), $\widetilde{Z}$ est une déformation de $\widetilde{Z}'$ à $\mu$-constant le long de $\{0\} \times Y$. Montrons que $\{\widetilde{Z} - \{0\} \times Y, \{0\} \times Y\}$ est une stratification de $\widetilde{Z}$ vérifiant la condition (a).

Procédons par récurrence sur l'entier $n - r$. Si $r = n$, alors $\widetilde{Z}$ est l'axe des paramètres, et l'assertion est claire.

Supposons $r < n$. D'après le lemme de construction de M. Giusti (voir page 101), il existe un polynôme $q \in \mathbf{C}[x]$ quasi-homogène pour le système $\beta$, tel que $(h, q)$ définisse une intersection complète à singularité isolée. Par suite, $(H, q)$ définit une déformation semi-quasi-homogène, donc à $\mu$-constant le long de l'axe des paramètres. L'hypothèse de récurrence et l'implication **(i)** $\Rightarrow$ **(iii)** permettent alors d'établir l'assertion. D'où le résultat.

# Chapitre 3

# Polynôme de Bernstein d'une fonction sur une intersection complète à singularité isolée

Dans [Ml1], B. Malgrange étudie le polynôme de Bernstein d'un germe de fonction à singularité isolée. Notamment, il le réalise comme polynôme minimal d'un endomorphisme du groupe de cohomologie de De Rham d'un $\mathcal{D}$-module de type fini supporté par l'origine.

Nous étendons ici sa construction au cas des germes de $\mathcal{D}$-Modules vérifiant certaines conditions de finitude. Pour cela, nous généralisons la partie $A$ de [B.G.M.M], où la construction de Malgrange est explicitée. Puis nous cherchons des $\mathcal{D}$-Modules holonomes adaptés à cette situation et à même de fournir des polynômes de Bernstein d'une fonction sur une singularité isolée.

## 3.1 Une construction de B. Malgrange

### 3.1.1 Le cadre

Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ un voisinage de l'origine. Nous noterons $\mathcal{O}_\Omega$ (resp. $\mathcal{D}_\Omega$) le faisceau des fonctions holomorphes (resp. opérateurs différentiels) sur $\Omega$, de fibre à l'origine $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{D}$).

Soient $f : \Omega \to \mathbf{C}$, une fonction holomorphe non constante, nulle en 0, et $\mathcal{M}$ la fibre à l'origine d'un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome régulier.

Notons $\mathcal{M}f^0$ l'image de $\mathcal{M}$ par l'application $\mathcal{D}$-linéaire naturelle de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}[1/f]$. De même, pour tout élément $m \in \mathcal{M}$, notons $mf^0$ son image dans $\mathcal{M}f^0$.

Lorsque $\mathcal{M}$ n'a pas de $f$-torsion, $\mathcal{M}f^0$ est bien sûr isomorphe à $\mathcal{M}$.

Munissons $\mathcal{M}[1/f,s]f^s$ d'une structure de $\mathcal{D}_{x,t}$-module en posant :

$$\begin{aligned} ta(s)mf^s &= a(s+1)mf^{s+1} \\ \frac{d}{dt}a(s)mf^s &= -sa(s-1)mf^{s-1} \end{aligned}$$

avec $a(s) \in \mathcal{O}[1/f,s]$, $m \in \mathcal{M}$. Remarquons que la multiplication par $s$ coïncide avec l'action de $(-d/dt)t$.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que $m \in \mathcal{M}$ est un élément tel que $mf^0$ n'appartient pas à $f\mathcal{M}f^0$ et qui satisfait aux conditions suivantes :

**(i)** l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $mf^0$, noté $\operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} mf^0$, admet un système de générateurs $(\diamondsuit_1, \ldots, \diamondsuit_l)$ constitué d'opérateurs de degré au plus un.

Pour $k = 1, \ldots, l$, posons $\diamondsuit_k = \diamondsuit'_k + \diamond_k$ où $\diamondsuit'_k$ n'a pas de terme constant dans l'écriture avec coefficients à gauche, et $\diamond_k = \diamondsuit_k.1 \in \mathcal{O}$.

**(ii)** l'idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ engendré par les éléments de $\operatorname{Ann}_{\mathcal{O}} mf^0$ et les $\diamondsuit'_k(f)$ est de colongueur finie (i.e. la dimension sur $\mathbf{C}$ de $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ est finie).

**(iii)** l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $mf^s$, noté $\operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} mf^s$, est contenu dans $\mathcal{D}\mathcal{J}$.

L'hypothèse $mf^0 \notin f\mathcal{M}f^0$ sert uniquement à garantir que $-1$ soit une racine de $b(mf^s, s)$ (cf. lemme 1.1.1.3).

Rappelons que l'on peut remplacer $mf^0$ par $m$ partout lorsque $\mathcal{M}$ n'a pas de $f$-torsion.

Ces conditions sont bien satisfaites lorsque $f$ est à singularité isolée à l'origine, $\mathcal{M} = \mathcal{O}$ et $m = 1$ (cf. [Y, th. 2.19, p. 133] ou [Ml1, p. 117] pour la condition **(iii)**). Dans ce cas, l'idéal $\mathcal{J}$ n'est autre que l'idéal jacobien de $f$.

Donnons quelques résultats relatifs à $mf^s$ sous nos hypothèses.

Lemme 3.1.1.1 *Il existe un bon opérateur en $s$ de degré un dans l'annulateur de $mf^s$ si et seulement si $f$ appartient à $\mathcal{J}$.*

*Preuve.* Si $f \in \mathcal{J}$, alors $f$ s'écrit $f = h + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \diamondsuit'_k(f)$, avec $h \in \operatorname{Ann}_{\mathcal{O}} mf^0$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathcal{O}$. Par suite, $s - \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \diamondsuit_k$ annule $mf^s$.

Réciproquement, soit $P(s) \in \mathcal{D}[s]$, un bon opérateur de degré un annulant $mf^s$. En particulier, $P(0)$ annule $mf^0$. Il existe donc des opérateurs $Q_k \in \mathcal{D}$ tels que $P(s) = s + \sum_{k=1}^{l} Q_k \diamondsuit_k$. Comme $P(s)$ annule $mf^s$, nous en déduisons que $f + \sum_{k=1}^{l} Q_k \diamondsuit_k'(f)$ annule $mf^{s-1}$. Or $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, mf^s$ est contenu dans $\mathcal{D}\mathcal{J}$. Par suite, $f \in \mathcal{D}\mathcal{J}$, i.e. $f \in \mathcal{J}$. Ce qui achève la preuve.

Ce résultat est évident lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{O}$, $m = 1$.

LEMME 3.1.1.2 *Il existe $c(s) \in \mathbf{C}[s]$, non nul, tel que $c(s)mf^s \in \mathcal{D}mf^{s+1}$.*

*Preuve.* Cette démonstration généralise une partie de celle de [Ms, prop. 2.10]. D'après le corollaire 1.1.2.9, il existe un bon opérateur $P(s) \in \mathcal{D}[s]$ qui annule $mf^s$. Notons $N \in \mathbf{N}^*$, son degré en $s$. Par itération d'une équation réalisant le polynôme de Bernstein de $mf^s$, nous obtenons l'identité :

$$b(mf^s, s) \cdots b(mf^s, s+N-1)mf^s = R(s)mf^{s+N} \qquad (1)$$

où $R(s) \in \mathcal{D}[s]$. Quitte à le diviser par $P(s+N)$, nous pouvons supposer que l'opérateur $R(s)$ est de degré en $s$ au plus $N-1$. Si $N = 1$, l'assertion est donc prouvée. Sinon, notons $S \in \mathcal{D}[s]$, le quotient de la division euclidienne de $R(s)$ par $s+N$. En particulier, $R(s) = (s+N)S + R(-N)$, et $S$ est de degré en $s$ au plus $N-2$.

D'autre part, $b(mf^s, s+N-1)$ est égal à $(s+N)\tilde{b}(mf^s, s+N-1)$. Aussi, en substituant $-N$ à $s$ dans (1), nous constatons que $R(-N)$ annule $mf^0$. Il s'écrit donc $R(-N) = \sum_{k=1}^{l} Q_k \diamondsuit_k$ où $Q_k \in \mathcal{D}$. Nous avons alors :

$$b(mf^s, s) \cdots b(mf^s, s+N-2)\tilde{b}(mf^s, s+N-1)mf^s = \widetilde{R}mf^{s+N-1}$$

où $\widetilde{R} = Sf + \sum_{k=1}^{l} Q_k \diamondsuit'(f) \in \mathcal{D}[s]$ est un opérateur de degré au plus $N-2$ en $s$. Par au plus $N-1$ itérations de ce procédé, nous obtenons alors que $c(s)mf^s \in \mathcal{D}mf^{s+1}$, avec $c(s) = b(mf^s, s)\tilde{b}(mf^s, s+1) \cdots \tilde{b}(mf^s, s+N-1)$, comme souhaité.

Rappelons qu'un $\mathcal{D}$-module est dit *supporté par l'origine* si tous ses éléments sont annulés par une puissance de l'idéal maximal de $\mathcal{O}$.

LEMME 3.1.1.3 *Il y a un isomorphisme de $\mathcal{D}[s]$-modules :*

$$\mathcal{N} = (s+1)\frac{\mathcal{D}[s]mf^s}{\mathcal{D}[s]mf^{s+1}} \cong \frac{\mathcal{D}[s]mf^s}{\mathcal{D}[s](f, \mathcal{J})mf^s} \ .$$

*En particulier, $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{D}$-module de type fini supporté par l'origine.*

*Preuve.* Considérons le morphisme suivant :

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{D}[s]mf^s & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ Pmf^s & \longmapsto & (s+1)(Pmf^s \bmod \mathcal{D}[s]mf^{s+1}) \end{array}$$

Déterminons son noyau. Soit $P \in \mathcal{D}[s]$ tel que :

$$(s+1)Pmf^s = Q(s)mf^{s+1} \tag{2}$$

avec $Q(s) \in \mathcal{D}[s]$. En faisant $s=-1$, il vient $Q(-1) \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, mf^0$. Par suite, l'opérateur $Q$ s'écrit $Q = (s+1)R + \sum_{k=1}^{l} Q_k \diamondsuit_k$ avec $R \in \mathcal{D}[s]$ et $Q_k \in \mathcal{D}$ pour $k = 1, \ldots, l$. L'équation (2) devient alors :

$$(s+1)Pmf^s = (s+1)(Rf + \sum_{k=1}^{l} Q_k \diamondsuit'_k(f))mf^s \ .$$

Comme $\mathcal{D}_{x,t}mf^s$ est sans $\mathbf{C}[s]$-torsion, une division par $(s+1)$ établit que $Pmf^s \in \mathcal{D}[s](f, \mathcal{J})mf^s$. Réciproquement, il résulte des identités :

$$(s+1)\diamondsuit'_k(f)mf^s = \diamondsuit_k mf^{s+1} \tag{3}$$

que $\mathcal{D}[s](f,\mathcal{J})mf^s$ est contenu dans le noyau de $\phi$. En conséquence, le morphisme $\phi$ passe au quotient en un morphisme injectif :

$$\bar{\phi} : \frac{\mathcal{D}[s]mf^s}{\mathcal{D}[s](f,\mathcal{J})mf^s} \longrightarrow \mathcal{N}$$

Comme de plus $\phi$ est clairement surjectif, $\bar{\phi}$ est donc un isomorphisme. D'autre part, il résulte de la proposition 1.1.2.5 que $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{D}$-module de type fini. L'idéal $\mathcal{J}$ étant de colongueur finie, le résultat s'ensuit.

Introduisons quelques notations avant d'établir la décomposition de $\mathcal{D}_{x,t}mf^s$ par l'idéal $\mathcal{J}$, première pierre de la construction.

NOTATIONS

Notons $E$ un sous $\mathbf{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{O}$ isomorphe à $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ par projection, $D$ le sous-anneau de $\mathcal{D}$ des opérateurs différentiels à coefficients constants, $DE$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$ engendré par les $\partial^\beta e$, $e \in E$, et $\mathcal{D}\mathcal{J}$ l'idéal à gauche de $\mathcal{D}$ engendré par $\mathcal{J}$. Pour tout $i \in \mathbf{N}$, posons enfin

$$m\xi_i = s(s-1)\cdots(s-i+1)mf^{s-i} = (-1)^i \left(\frac{d}{dt}\right)^i mf^s \ .$$

REMARQUE 3.1.1.4 Grâce aux relations $tm\xi_i = im\xi_{i-1} + fm\xi_i$ lorsque $i \in \mathbf{N}^*$, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{D}_{x,t}mf^s = \sum_{i \geq 0} \mathcal{D}m\xi_i \ .$$

Proposition 3.1.1.5 *Il y a une décomposition :*

$$\mathcal{D}_{x,t}mf^s = \mathcal{D}\mathcal{J}mf^s \oplus (\bigoplus_{i\geq 0} DEm\xi_i) \ .$$

*Preuve.* • Montrons l'existence de la décomposition. D'après la remarque 3.1.1.4, il suffit de le faire pour les éléments de la forme $\partial^\beta um\xi_i$, $u \in \mathcal{O}$. Pour tout $u \in \mathcal{O}$, il existe un unique $v \in E$ et $h \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}}\, mf^0$, $\lambda_k \in \mathcal{O}$, $k = 1, \ldots, l$, tels que $u = v + h + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \diamondsuit'_k(f)$. Aussi, quand $i > 0$, il vient

$$um\xi_i = vm\xi_i + \sum_{k=1}^{l} (\diamondsuit_k \lambda_k - \diamondsuit'_k(\lambda_k))\, m\xi_{i-1} \tag{4}$$

En faisant une récurrence sur $i$, tout élément de $\mathcal{D}_{x,t}mf^s$ se décompose alors dans $\mathcal{D}\mathcal{J}mf^s \oplus (\bigoplus_{i\geq 0} DEm\xi_i)$.

• Montrons l'unicité. Supposons que $Vmf^s + \sum_{i=0}^{N} U_i m\xi_i = 0$ avec $V \in \mathcal{D}\mathcal{J}$ et $U_i \in DE$. Si $N = 0$, l'opérateur $V + U_0$ appartient à l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $mf^s$. Ainsi $U_0 \in DE \cap \mathcal{D}\mathcal{J}$. Donc $U_0 = 0$, puis $Vmf^s = 0$.

Pour $N > 0$, en substituant $s = 0$, on trouve que $V + U_0$ annule $mf^0$. Donc $V + U_0 = \sum_{k=1}^{l} Q_k \diamondsuit_k$, avec $Q_1, \ldots, Q_l \in \mathcal{D}$. Après simplification par $s$, il vient :

$$(\sum_{k=1}^{l} Q_k \diamondsuit'_k(f) + U_1)mf^{s-1} + \sum_{i=2}^{N} (s-1)\cdots(s-i+1)U_i mf^{s-i} = 0$$

La substitution de $s+1$ à $s$ permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence ; ainsi $U_1 = \cdots = U_N = 0$. Par suite, $(V + U_0)mf^s = 0$, puis $U_0 = 0$ et $Vmf^s = 0$.

Remarque 3.1.1.6 Tout élément $U$ de $DEm\xi_i$, $i \in \mathbf{N}$, s'écrit de façon unique $U = Pm\xi_i$, où $P \in DE$. En effet, aucun élément non nul de $DE$ n'annule $m\xi_i$, puisque l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, m\xi_i = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, mf^s$ est inclus dans $\mathcal{D}\mathcal{J}$.

### 3.1.2 Les espaces $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}'$

Notons $D'$ l'idéal de $D$ des opérateurs dont le terme constant est nul. Considérons l'application linéaire surjective :

$$c : \mathcal{D}_{x,t}mf^s = \mathcal{D}\mathcal{J}mf^s \oplus (\bigoplus_{i\geq 0} DEm\xi_i) \longrightarrow \bigoplus_{i\geq 0} Em\xi_i$$

définie par $c(\mathcal{D}\mathcal{J}mf^s) = 0$ et si $Q = Q' + e$ avec $Q' \in D'E$, $e \in E$, alors $c(Qm\xi_i) = em\xi_i$ pour tout $i \in \mathbf{N}$. D'après la remarque 3.1.1.6, $c$ est bien définie. C'est une application dite de *prise de terme constant à droite.*

Son noyau est $\mathcal{D}\mathcal{J}mf^s \oplus (\bigoplus_{i\geq 0} D'Em\xi_i)$. Plus précisément :

LEMME 3.1.2.1 *Pour tout entier $i \in \mathbf{N}$, $D'\mathcal{O}m\xi_i \subset \ker c$.*

*Preuve.* Raisonnons par récurrence sur $i$. Si $i = 0$, c'est patent, à cause de la décomposition $D'\mathcal{O}m\xi_0 = D'\mathcal{J}m\xi_0 \oplus D'Em\xi_0$. Supposons $i \geq 1$. Soit $Q \in D'$ et $u \in \mathcal{O}$. Il résulte de l'identité (4) de la proposition 3.1.1.5 que $Qum\xi_i = Qvm\xi_i + QRm\xi_{i-1}$ où $v \in E$ et $R \in \mathcal{D}$. Par hypothèse de récurrence, $c(QRm\xi_{i-1}) = 0$ ; comme de plus $D'Em\xi_i \subset \ker c$, nous en déduisons que $c(Qum\xi_i) = 0$. Par suite $c(D'\mathcal{O}m\xi_i) = 0$, comme souhaité.

Posons $\mathcal{Z}' = c(\mathcal{D}[s]mf^s)$ et $\mathcal{Z} = c(\mathcal{D}[s](f,\mathcal{J})mf^s) \subset \mathcal{Z}'$. Nous avons ainsi le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{D}\mathcal{J}mf^s & \subset & \mathcal{D}[s](f,\mathcal{J})mf^s & \subset & \mathcal{D}[s]mf^s & \subset & \mathcal{D}_{x,t}mf^s \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow c \\
0 & \in & \mathcal{Z} & \subset & \mathcal{Z}' & \subset & \bigoplus_{i\geq 0} Em\xi_i
\end{array}$$

LEMME 3.1.2.2 *Il y a l'égalité entre $\mathcal{D}[s]$-modules :*

$$\mathcal{D}[s](f,\mathcal{J})mf^s = \left(\frac{d}{dt}\right)^{-1} \mathcal{D}[s]mf^s \ .$$

*Preuve.* • Soit $Q(s)$ un opérateur de l'idéal $\mathcal{D}[s](f,\mathcal{J})$. Il s'écrit $Q(s) = Q_0(s)f + \sum_{k=1}^{l} Q_k(s)\diamondsuit_k'(f)$ avec $Q_k(s) \in \mathcal{D}[s]$, $k = 0,\ldots,l$. Alors :

$$sQ(s-1)mf^{s-1} = (sQ_0(s-1) + \sum_{k=1}^{l} Q_k(s-1)\diamondsuit_k)mf^s \ \in \ \mathcal{D}[s]mf^s \ .$$

Ainsi $Q(s)mf^s$ appartient à $(d/dt)^{-1}\mathcal{D}[s]mf^s$, ce qui établit une inclusion.

• Soit $U \in \mathcal{D}_{x,t}mf^s$ tel que $(d/dt)U$ appartienne à $\mathcal{D}[s]mf^s$. Puisque $-t(d/dt)U = (s+1)U$, il existe donc un opérateur $Q(s) \in \mathcal{D}[s]$ tel que :

$$(s+1)U = Q(s)mf^{s+1}$$

Comme dans la preuve du lemme 3.1.1.3, nous en déduisons que l'élément $U$ appartient bien à $\mathcal{D}[s](f,\mathcal{J})mf^s$. D'où la seconde inclusion.

Notons $\eta : \bigoplus_{i\geq 0} DEm\xi_i \to \bigoplus_{i\geq 1} DEm\xi_i$ la bijection $\mathbf{C}$-linéaire obtenue par restriction de $d/dt$. Remarquons que $\eta c(U) = c\eta(U)$ pour tout élément $U$ appartenant à $\bigoplus_{i\geq 0} DEm\xi_i$.

LEMME 3.1.2.3 *Il y a une décomposition :*

$$\mathcal{Z}' = Em\xi_0 \oplus \eta(\mathcal{Z})$$

*dans* $\bigoplus_{i\geq 0} Em\xi_i$.

*Preuve.* Soit $u \in \mathcal{Z}'$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que c'est l'image par $c$ d'un élément $U \in \mathcal{D}[s]mf^s \cap \bigoplus_{i\geq 0} DEm\xi_i$. Posons $U = U_0 + U'$ où $U_0 \in DEmf^s$ et $U' \in \mathcal{D}[s]mf^s \cap \bigoplus_{i\geq 1} DEm\xi_i$. Nous avons alors la décomposition $u = c(U_0) + \eta c\eta^{-1}(U')$ dans $Em\xi_0 \oplus \eta(\mathcal{Z})$. Réciproquement, l'inclusion $Em\xi_0 \subset \mathcal{Z}'$ étant manifeste, il reste à vérifier celle de $\eta(\mathcal{Z})$ dans $\mathcal{Z}'$. Soit $u \in \mathcal{Z}$. D'après le lemme 3.1.2.2, on peut supposer que c'est l'image par $c$ d'un élément $U \in (d/dt)^{-1}\mathcal{D}[s]mf^s \cap \bigoplus_{i\geq 0} DEm\xi_i$. Ainsi $\eta(u) = c\eta(U)$ appartient à $\mathcal{Z}'$. D'où l'inclusion $\eta(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}'$ ; ce qui achève la preuve.

PROPOSITION 3.1.2.4 *Les* $\mathbf{C}$*-espaces vectoriels* $\mathcal{Z}$ *et* $\mathcal{Z}'$ *sont de dimension finie, et* $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$ *a pour dimension la colongueur de l'idéal* $\mathcal{J}$.

*Preuve.* Soit $N$ le degré d'un bon opérateur en $s$ annulant $mf^s$ (cf. corollaire 1.1.2.9). Alors :

$$\mathcal{D}[s]mf^s = \sum_{i=0}^{N-1} s^i \mathcal{D}mf^s = \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{D}f^i m\xi_i \subset \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{D}m\xi_i \tag{5}$$

Remarquons que, d'après le lemme 3.1.2.1, $c(\mathcal{D}m\xi_i) = c(\mathcal{O}m\xi_i)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$. L'identité (5) entraîne alors :

$$\mathcal{Z}' \subset c(\sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{O}m\xi_i) = \bigoplus_{i=0}^{N-1} Em\xi_i \ ,$$

l'égalité étant une conséquence directe de l'identité (4) de la preuve de la proposition 3.1.1.5.

Ainsi, $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}'$ sont de dimension finie. L'assertion sur la dimension de $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$ résulte alors du lemme 3.1.2.3.

REMARQUE 3.1.2.5 Si $f$ appartient à l'idéal $\mathcal{J}$, alors $\mathcal{Z} = 0$ et $\mathcal{Z}' = Em\xi_0$. C'est une conséquence directe de la preuve de cette proposition et des lemmes 3.1.1.1 et 3.1.2.3. La réciproque est vraie. En effet, si $\mathcal{Z}$ est réduit à 0, alors en particulier $c(fmf^s) = 0$ ; ce qui revient à dire que $f \in \mathcal{J}$ (cf. proposition 3.1.1.5).

### 3.1.3 Le polynôme de Bernstein de $mf^s$

• Définissons l'action de $s$ sur $\bigoplus_{i\geq 0} Em\xi_i$ en posant $s.U = c(sU)$.

Rappelons que $\ker c = \mathcal{D}\mathcal{J}mf^s \oplus (\bigoplus_{i\geq 0} D'Em\xi_i)$. Montrons que :

LEMME 3.1.3.1 *Si $U \in \ker c$, alors $c(sU) \in \mathcal{Z}$.*

*Preuve.* Montrons que $c(sD'Em\xi_i) = 0$ pour tout entier $i \in \mathbf{N}$. En effet, nous avons l'identité $sm\xi_i = fm\xi_{i+1} + im\xi_i$, d'où l'inclusion $sD'Em\xi_i \subset D'\mathcal{O}m\xi_{i+1} + D'Em\xi_i$ ; ainsi $sD'Em\xi_i \subset \ker c$ d'après le lemme 3.1.2.1. En particulier, $s\bigoplus_{i\geq 0} D'Em\xi_i$ est bien dans le noyau de $c$. L'assertion en résulte immédiatement.

Nous en déduisons alors :

LEMME 3.1.3.2 *L'action de $s$ sur $\bigoplus_{i\geq 0} Em\xi_i$ laisse stable $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}'$.*

*Preuve.* Si $U \in \mathcal{Z}$, il existe $U' \in \ker c$ tel que $V = U + U'$ appartient à $\mathcal{D}[s](f,\mathcal{J})mf^s$. Ainsi, $s.U = c(sU) = c(sV) - c(sU')$. Il résulte alors du lemme précédent que $s.U \in \mathcal{Z}$, comme souhaité.

L'assertion sur $\mathcal{Z}'$ s'établit de la même façon.

Nous avons donc une action de $s$ sur $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$, qui s'écrit $s.\overline{c(U)} = \overline{c(sU)}$.

• Rappelons que si $\mathcal{P}$ est un $\mathcal{D}$-module à gauche, on appelle *complexe de De Rham* de $\mathcal{P}$, et on note $\mathrm{DR}(\mathcal{P})$, le complexe de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels :

$$0 \to \mathcal{P} \xrightarrow{d} \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{P} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{P} \to 0$$

où $\Omega^i$ désigne l'espace des $i$-formes différentielles à coefficients dans $\mathcal{O}$ et la différentielle $d$ est définie par :

$$d(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \otimes u) = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} u$$

pour $u \in \mathcal{P}$ et $k = 0, \ldots, n-1$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. On note $H^{\bullet}_{DR}(\mathcal{P})$ la cohomologie de $\mathrm{DR}(\mathcal{P})$. Rappelons enfin que le foncteur $H^n_{DR}(-)$ est exact sur les $\mathcal{D}$-modules supportés par l'origine ([Ml1, p. 100-104]).

THÉORÈME 3.1.3.3 *Si $b(mf^s, s) = (s+1)\tilde{b}(mf^s, s)$ désigne le polynôme de Bernstein de $mf^s$, $\tilde{b}(mf^s, s)$ est le polynôme minimal de l'action de $s$ sur $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$.*

*Preuve.* Cette preuve reprend les idées de la démonstration du théorème 5.4 de [Ml1]. Soit $\mathcal{N}$ le $\mathcal{D}[s]$-module considéré au lemme 3.1.1.3 :

$$\mathcal{N} = (s+1)\frac{\mathcal{D}[s]mf^s}{\mathcal{D}[s]mf^{s+1}} \ .$$

D'après le théorème de structure des $\mathcal{D}$-modules supportés par l'origine, $\tilde{b}(mf^s, s)$ est le polynôme minimal de l'action de $s$ sur le $n^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie de De Rham de $\mathcal{N}$ :

$$H^n_{DR}(\mathcal{N}) = \frac{\mathcal{N}}{\sum(\partial/\partial x_i)\,\mathcal{N}} \ .$$

Il reste à identifier $H^n_{DR}(\mathcal{N})$ à $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$. Introduisons pour cela de nouveaux objets, plus adaptés à cette situation.

Posons $\mathcal{E} = \bigoplus_{i\geq 0} DEm\xi_i$. Munissons le d'une structure de $\mathcal{D}$-module en l'identifiant avec le quotient de $\mathcal{D}_{x,t}mf^s = \mathcal{D}\mathcal{J}mf^s \oplus (\bigoplus_{i\geq 0} DEm\xi_i)$ par $\mathcal{D}\mathcal{J}mf^s$. Notons $\pi : \mathcal{D}_{x,t}mf^s \to \mathcal{E}$, la projection canonique. Posons alors $\mathcal{L}' = \pi(\mathcal{D}[s]mf^s)$ et $\mathcal{L} = \pi(\mathcal{D}[s](f,\mathcal{J})mf^s) \subset \mathcal{L}'$.

Notons $\bar{c} : \mathcal{E} \to \bigoplus_{i\geq 0} Em\xi_i$, l'application obtenue par passage au quotient de $c$. En particulier, nous avons $\bar{c}(\mathcal{L}) = \mathcal{Z}$ et $\bar{c}(\mathcal{L}') = \mathcal{Z}'$.

Déduisons d'abord du lemme 3.1.1.3 l'isomorphisme de $\mathcal{D}[s]$-modules :

$$\mathcal{N} \cong \frac{\mathcal{L}'}{\mathcal{L}} \ .$$

En considérant les suites exactes longues de cohomologie associées aux suites exactes courtes de complexes suivantes :

$$0 \to \mathrm{DR}(\mathcal{L}) \hookrightarrow \mathrm{DR}(\mathcal{L}') \twoheadrightarrow \mathrm{DR}(\frac{\mathcal{L}'}{\mathcal{L}}) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{DR}(\mathcal{L}') \hookrightarrow \mathrm{DR}(\mathcal{E}) \twoheadrightarrow \mathrm{DR}(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{L}'}) \to 0$$

et en remarquant que les $\mathcal{D}$-modules intervenant à droite sont supportés par l'origine, on établit l'isomorphisme :

$$H^n_{DR}(\mathcal{N}) \cong \frac{H^n_{DR}(\mathcal{L}')}{H^n_{DR}(\mathcal{L})}$$

et les injections :

$$H^n_{DR}(\mathcal{L}) \hookrightarrow H^n_{DR}(\mathcal{L}') \hookrightarrow H^n_{DR}(\mathcal{E})$$

Explicitons alors $H^n_{DR}(\mathcal{E})$. Remarquons que $\bar{c}$ a pour noyau $\sum_{i=1}^n (\partial/\partial x_i)\mathcal{E}$. En conséquence, nous avons un isomorphisme de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels :

$$H^n_{DR}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\bar{c}} \bigoplus_{i\geq 0} Em\xi_i$$

Constatons alors que, *via* cet isomorphisme, $H^n_{DR}(\mathcal{L})$ et $H^n_{DR}(\mathcal{L}')$ s'identifient à $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}'$ respectivement. Par suite, $H^n_{DR}(\mathcal{N})$ est bien isomorphe à $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$. Remarquons enfin que cet isomorphisme est compatible avec l'action de $s$, ce qui termine la preuve.

Remarque 3.1.3.4 On pouvait s'inquiéter en début de chapitre du caractère *a priori* non unique de l'idéal $\mathcal{J}$ défini à la condition **(ii)**. *A posteriori*, il résulte du théorème précédent et de la proposition 3.1.2.4 que l'idéal $\mathcal{J}$ est indépendant du choix du système $(\diamondsuit_1, \ldots, \diamondsuit_l)$. En conséquence, pour tout opérateur $Q \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, mf^0$ de degré un, $Q(f)$ appartient à l'idéal $\mathcal{J}$.

Remarque 3.1.3.5 La condition **(i)** introduite en début de chapitre est très contraignante. Donnons des conditions plus faibles sur $mf^s$ sous lesquelles un multiple de $b(mf^s, s)$ peut être calculé.

Soit $m \in \mathcal{M}$, un germe tel que $mf^0 \notin f\mathcal{M}f^0$. Supposons qu'il existe des opérateurs $\diamondsuit_1, \ldots, \diamondsuit_l \in \mathcal{D}$ de degré au plus un qui annule $mf^0$, et tels que l'idéal $\mathcal{J}' \subset \mathcal{O}$ engendré par les $\diamondsuit'_k(f) = [\diamondsuit_k, f]$, $k = 1, \ldots, l$, $f$, et les éléments de $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}}\, mf^0$ soit de colongueur finie. Soit enfin $P(s) \in \mathcal{D}[s]$, un bon opérateur en $s$ qui annule $mf^s$ (corollaire 1.1.2.9).

Considérons l'application $\mathcal{D}[s]$-linéaire surjective naturelle :

$$\mathcal{N}' = \frac{\mathcal{D}[s]}{\mathcal{D}[s]P(s) + \mathcal{D}[s]\mathcal{J}'} \longrightarrow (s+1)\frac{\mathcal{D}[s]mf^s}{\mathcal{D}[s]mf^{s+1}}$$

bien définie grâce aux relations (3) du lemme 3.1.1.3. Sous nos hypothèses, c'est un morphisme entre deux $\mathcal{D}$-modules de type fini supportés par l'origine. Nous en déduisons que $\tilde{b}(mf^s, s)$ divise le polynôme minimal de l'action de $s$ sur $H^n_{DR}(\mathcal{N}')$, $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Constatons enfin que cet endomorphisme peut être explicité à partir de $P(s)$ et d'une cobase de $\mathcal{J}'$ (ayant $H^n_{DR}(\mathcal{N}') \cong (\mathcal{O}/\mathcal{J}')^N$ si $N$ est le degré en $s$ de $P(s)$).

## 3.2 Polynôme de Bernstein d'une fonction sur une intersection complète à singularité isolée

Dans ce qui suit, $\mathcal{O}$ désignera l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbf{C}^n$, et $\mathcal{D}$, l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathcal{O}$.

Soient $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, un voisinage de l'origine, $g = (g_1, \ldots, g_p) : \Omega \to \mathbf{C}^p$, $p \leq n-1$, et $(f, g) : \Omega \to \mathbf{C}^{p+1}$, des applications analytiques, définissant des intersections complètes à singularité isolée en 0, notées $X$ et $Z$. Quitte à restreindre $\Omega$, nous supposerons que l'origine est la seule singularité des applications $g$ et $(f, g)$.

L'inclusion suivante résulte facilement du lemme des petits chemins :

$$\mathrm{Crit}\,(f|_X) \subset \mathrm{Sing}\,(X) \cup \mathrm{Sing}\,(Z)$$

où $\mathrm{Crit}\,(f|_X)$ désigne l'adhérence du lieu critique de la restriction de $f$ à la partie lisse de $X$. En particulier, l'idéal de $\mathcal{O}$ engendré par $g_1, \ldots, g_p$, et les mineurs maximaux de la jacobienne de $(f, g)$, est de colongueur finie. De plus, la formule de Greuel-Lê ([Gr], [Lê1]) établit que cette colongueur est la somme des nombres de Milnor à l'origine des espaces $X$ et $Z$.

Nous cherchons ici des germes de $\mathcal{D}$-modules holonomes liés à l'application $g$, qui satisfont aux conditions du paragraphe 3.1.1. Le module de cohomologie locale algébrique à support $X$ :

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{O}[1/g_1 \cdots g_p]}{\sum_{i=1}^{p} \mathcal{O}[1/g_1 \cdots \check{g}_i \cdots g_p]}$$

est bien sûr le premier à considérer.

Notons $\delta \in \mathcal{R}$, la classe de $1/g_1 \cdots g_p$. Enfin, quand $p = 1$, pour tout entier $\ell \geq 2$, $\delta_\ell$ désignera la classe de $1/g^\ell$ dans $\mathcal{R} = \mathcal{O}[1/g]/\mathcal{O}$.

### 3.2.1 Deux calculs d'annulateur

Dans ce paragraphe, nous commençons par déterminer l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\delta f^s$ sous les hypothèses précisées plus haut. Le point crucial est que la variété caractéristique de $\mathcal{D}\delta f^s$ est alors explicitement connue.

Puis, lorsque $f$ est lisse et $p = 1$, nous déterminons l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta_\ell f^s$, $\ell \geq 2$, par un calcul algébrique direct.

**L'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta f^s$**

Ce calcul reprend les méthodes développées par J. Briançon, H. Biosca, Ph. Maisonobe et H. Maynadier pour le calcul de l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $f_1^{s_1}\cdots f_r^{s_r}$, $r \geq 1$, quand $(f_1,\ldots,f_r)$ est un $r$-uplet de fonctions holomorphes définissant un germe d'intersection complète à singularité isolée à l'origine ([B.B.M.M, p. 127-131]).

Notons $\pi : T^*\Omega \to \Omega$, la projection canonique. Fixons sur $\Omega$ un système de coordonnées $x_1,\ldots,x_n$, centré à l'origine et notons $(x,\xi)$, $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$, les coordonnées induites sur $T^*\Omega$.

En utilisant la formule de l'indice de Kashiwara ([K4, § 3.1, p. 126]), on établit que le cycle caractéristique de $\mathcal{R}$ est :

$$\mathrm{Car}(\mathcal{R}) = T_X^*\Omega + \mu'(X)T_{\{0\}}^*\Omega$$

où $\mu'(X) \in \mathbf{N}$ est le nombre de Milnor de la section hyperplane générique de $X$ à l'origine. D'après la remarque 1.1.2.6, nous avons alors :

$$\mathrm{Car}(\mathcal{D}\delta f^s) = W_{f|X}$$

où $W_{f|X}$ est le fibré conormal relatif à la restriction de $f$ à $X$ :

$$W_{f|X} = \overline{\{(x,\xi+\lambda \mathrm{d}f(x)) \mid (x,\xi)\in T_X^*\Omega,\ \lambda\in\mathbf{C}\}} \subset T^*\Omega\ .$$

Au dessus de $X - \{0\}$, c'est un fibré vectoriel de rang $p+1$.

REMARQUE 3.2.1.1 Si $n = p+1$, $W_{f|X}$ est exactement $X \times (\mathbf{C}^n)^* \subset T^*\Omega$. Il en résulte que :

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\delta f^s = \sum_{i=1}^{p} \mathcal{D}g_i = \mathcal{D}\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}}\,\delta\ .$$

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que $n > p+1$. En particulier, $W_{f|X}$ est irréductible de dimension $n+1$.

REMARQUE 3.2.1.2 Si $g$ est une submersion à l'origine, notre hypothèse sur l'application $(f,g)$ revient à dire que la restriction de $f$ à $X$, notée $\tilde{f}$, admet une singularité isolée en 0.

En conséquence, dans un système de coordonnées où $g_i = x_i$, $i = 1,\ldots,p$, et $\tilde{f} \in \mathbf{C}\{x_{p+1},\ldots,x_n\}$, l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta f^s$ est l'idéal engendré par $x_1,\ldots,x_p$, et les opérateurs $(\partial/\partial x_i)\tilde{f}'_{x_j} - (\partial/\partial x_j)\tilde{f}'_{x_i}$, $p+1 \leq i < j \leq n$ ([Ml1] ou [Y]).

Nous supposerons donc que l'origine est un point critique de $g$.

Rappelons une définition.

DÉFINITION 3.2.1.3 *Soit* $h = (h_1, \dots, h_r) : \Theta \to \mathbf{C}^r$, *une application analytique définie sur un voisinage de l'origine* $\Theta \subset \mathbf{C}^n$. *On appelle* espace conormal relatif au morphisme $h$, *l'ensemble :*

$$W_h = \overline{\left\{ \left( x, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathrm{d}h_i(x) \right) \; ; \; x \in \Theta, \; \underset{\sim}{\lambda} \in \mathbf{C}^r \right\}} \subset T^*\Theta \ ,$$

*adhérence dans* $T^*\Theta$ *de l'ensemble des espaces conormaux aux fibres lisses.*

C'est un sous-ensemble analytique, irréductible, de dimension $n + \mathrm{rg}(h)$, conique dans les fibres de la projection $T^*\Theta \to \Theta$. On le note aussi $T^*_h\Omega$.

LEMME 3.2.1.4 *La fibre à l'origine de la restriction de* $\pi$ *à* $W_{f|X}$ *coïncide avec le conormal au point* $T^*_{\{0\}}\Omega$.

*Preuve.* L'origine étant un point singulier isolé de $Z$, la fibre à l'origine de la restriction de $\pi$ à $W_{f,g}$ est égale à $T^*_{\{0\}}\Omega$ ([B.B.M.M, lem. 1, p. 128]). De plus, le morphisme $(f, g) \circ \pi : W_{f,g} \to \mathbf{C}^{p+1}$ est équidimensionnel, donc ouvert. En particulier, la projection $W_{f,g} \to \Omega$ est ouverte au dessus de $X$. L'assertion en résulte aisément.

NOTATION

Considérons la matrice à coefficients dans $\mathcal{O}[\xi]$ :

$$M(x, \xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Notons $\widetilde{M}(x)$, la matrice à coefficients dans $\mathcal{O}$ constituée des $p+1$ dernières lignes de $M(x, \xi)$.

Si $\kappa = (k_1, \dots, k_{p+2}) \in \{1, \dots, n\}^{p+2}$ est un multi-indice tel que $k_i < k_j$ pour $i < j$, notons $\nu^{f,g}_K$ le $(p+2) \times (p+2)$ mineur construit sur les colonnes $k_1, \dots, k_{p+2}$ :

$$\nu^{f,g}_K = \sum_{i=1}^{p+2} (-1)^{i+1} \frac{\partial(f, g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_{k_1}, \dots, \check{x_{k_i}}, \dots, x_{k_{p+2}})} \xi_{k_i} \ .$$

Si $n < p+2$, nous posons $\nu_K^{f,g} = 0$ par convention.

Soit $I \subset \mathcal{O}[\xi]$, l'idéal engendré par ces mineurs, et $J$ celui engendré par $g_1, \ldots, g_p$, et par les éléments de l'idéal $I$.

Notons enfin $V(J) \subset T^*\Omega$ la variété des zéros de $J$, d'algèbre $\mathcal{O}[\xi]/J$, et $|V(J)|$ l'ensemble sous-jacent.

LEMME 3.2.1.5 *L'ensemble des zéros de l'idéal $J$ est $W_{f|X}$.*

*Preuve.* L'inclusion de $W_{f|X}$ dans $|V(J)|$ étant manifeste, montrons sa réciproque. Soit $(u,v) \in |V(J)|$. Si $u$ est l'origine, $(u,v)$ appartient à $W_{f|X}$ d'après le lemme 3.2.1.4. Sinon, $u \in X - \{0\}$ et la matrice $M(u,v)$ est de rang au plus $p+1$. Mais il résulte de nos hypothèses que l'idéal de $\mathcal{O}$ engendré par $g_1, \ldots, g_p$, et les mineurs maximaux de la matrice $\widetilde{M}(x)$ est de colongueur finie (voir page 81). Par suite, la matrice $M(u,v)$ est de rang exactement $p+1$. Ainsi, le vecteur $v \in (\mathbf{C}^n)^*$ est une combinaison linéaire des formes $\mathrm{d}f(u)$, $\mathrm{d}g_1(u), \ldots, \mathrm{d}g_p(u)$, i.e. $(u,v) \in W_{f|X}$ ; ce qui achève la preuve.

PROPOSITION 3.2.1.6 *L'idéal $J$ est l'idéal premier des fonctions nulles sur $W_{f|X}$.*

*Preuve.* D'après le lemme précédent et le théorème des zéros de Hilbert, il suffit de voir que l'idéal $J$ est réduit. D'après [B.B.M.M, lem. 2, p. 128], l'anneau $\mathcal{O}\{\xi\}/I$ est de Cohen-Macaulay de dimension $n+p+1$. Comme $|V(J)| = W_{f|X}$ est de dimension $n+1$, la suite $(\dot{g}_1, \ldots, \dot{g}_p)$ est $\mathcal{O}\{\xi\}/I$-régulière. Par suite, l'anneau $\mathcal{O}\{\xi\}/J$ est de Cohen-Macaulay. En conséquence, $V(J)$ n'a pas de composante immergée. L'idéal $J$ est donc réduit, étant clairement presque partout réduit sous nos hypothèses. Ce qui termine la preuve.

Ainsi, $J$ est l'idéal définissant $\mathrm{car}(\mathcal{D}\delta f^s) = W_{f|X}$.

NOTATION

Soit $h = (h_1, \ldots, h_r) : \Theta \to \mathbf{C}^r$, une application analytique définie sur un ouvert $\Theta \subset \mathbf{C}^n$. Pour tout multi-indice $\kappa = (k_1, \ldots, k_{r+1}) \in \{1, \ldots, n\}^{r+1}$ tel que $k_i < k_j$ pour $i < j$, notons $\Delta_K^h \in \mathcal{D}$ l'opérateur :

$$\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} \frac{\partial(h_1, \ldots, h_r)}{\partial(x_{k_1}, \ldots, \check{x_{k_i}}, \ldots, x_{k_{r+1}})} \frac{\partial}{\partial x_{k_i}} .$$

Si $n < r+1$, nous posons $\Delta_K^h = 0$ par convention.

En particulier, $\nu_K^{f,g}$ est le symbole principal de $\Delta_K^{f,g}$.

PROPOSITION 3.2.1.7 *Soient* $g = (g_1, \dots, g_p) : \Omega \to \mathbf{C}^p$ *et* $(f,g) : \Omega \to \mathbf{C}^{p+1}$*, des applications analytiques définies sur un voisinage de l'origine* $\Omega \subset \mathbf{C}^n$*, définissant des intersections complètes à singularité isolée en* $0$*.*

*Alors, l'annulateur dans* $\mathcal{D}$ *de* $\delta f^s$ *est :*

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta f^s = \sum_{i=1}^{p} \mathcal{D} g_i + \sum_{K} \mathcal{D} \Delta_K^{f,g}$$

*avec* $K = (k_1, \dots, k_{p+2}) \in \mathbf{N}^{p+2}$*,* $1 \leq k_1 < \dots < k_{p+2} \leq n$*.*

*Preuve.* Si le morphisme $g$ est une submersion à l'origine, cela résulte de la remarque 3.2.1.2. Supposons maintenant que l'origine est un point critique de $g$. Notons $\tilde{J} \subset \mathcal{D}$, l'idéal proposé. Il est patent que $\tilde{J}$ est inclu dans l'annulateur de $\delta f^s$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $P \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta f^s$. Alors $\sigma(P)$ s'annule sur $\mathrm{car}(\mathcal{D}\delta f^s)$. Par suite, $\sigma(P)$ appartient à l'idéal $J$. En notant $Q_1, \dots, Q_l$, les générateurs donnés de l'idéal $\tilde{J}$, il existe donc $v_1, \dots, v_l \in \mathcal{O}[\xi]$ tels que $\sigma(P) = \sum_{j=1}^{l} v_j \sigma(Q_j)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que cette égalité est homogène en $\xi$.

En relevant les $v_j$, nous pouvons alors construire un opérateur $R \in \tilde{J}$ de même symbole que $P$. L'opérateur $P - R$ annule $\delta f^s$ et est de degré strictement inférieur à celui de $P$. La proposition se démontre donc par récurrence sur le degré de $P$ (puisque, en degré zéro, $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}}\, \delta f^s = \sum_{i=1}^{p} \mathcal{O} g_i$ d'après le lemme 1.3.1.1).

REMARQUE 3.2.1.8 Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module holonome régulier, et $m \in \mathcal{M}$ tel que $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}}\, m f^0 = (g_1, \dots, g_p)\mathcal{O}$, $\mathrm{car}(\mathcal{D}m) = T_X^*\Omega \cup T_{\{0\}}^*\Omega$, et les opérateurs $\Delta_K^{f,g}$ annulent $mf^s$. Alors, la même démonstration établit que l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $mf^s$ est l'idéal obtenu à la proposition précédente.

### Cas particulier d'une fonction lisse sur une hypersurface

Supposons maintenant que $p = 1$. Déterminons alors l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta_\ell f^s$, $\ell \geq 2$, lorsque la fonction $f$ est lisse à l'origine.

Montrons d'abord un lemme technique.

LEMME 3.2.1.9 *Soient* $\mathbf{A}$ *un anneau commutatif, et* $(h_1, \dots, h_r) \in \mathbf{A}^r$*, une suite* $\mathbf{A}$*-régulière. Soit* $P \in \mathbf{A}[\xi_1, \dots, \xi_r]$*, un polynôme homogène tel que* $P(h_1, \dots, h_r) = 0$*. Alors* $P$ *appartient à l'idéal engendré par les polynômes* $h_i\xi_j - h_j\xi_i$*,* $i \neq j$*.*

*Preuve.* Procédons par récurrence sur l'entier $r$. Si $r = 1$, l'assertion est évidente. Supposons le résultat vérifié pour $r \geq 1$. Soit $(h_0, \dots, h_r)$ une suite $\mathbf{A}$-régulière. Notons $I$ (resp. $I_0$) l'idéal de $\mathbf{A}[\xi_0, \dots, \xi_r]$ engendré par $h_i\xi_j - h_j\xi_i$, $i \neq j$ (resp. $i \neq j$ et $i, j \geq 1$).

Soit $P \in \mathbf{A}[\xi_0, \dots, \xi_r]$, un polynôme homogène s'annulant en $(h_0, \dots, h_r)$. Montrons que $P$ appartient à $I$. Par division euclidienne par $\xi_0$, il s'écrit :

$$P = \xi_0 Q + R$$

où $R \in \mathbf{A}[\xi_1, \dots, \xi_r]$ est nul ou homogène de degré deg $P$. En particulier, si $\mathbf{B}$ désigne l'anneau $\mathbf{A}/h_0\mathbf{A}$, $R$ définit dans $\mathbf{B}[\xi_1, \dots, \xi_r]$ un polynôme homogène qui s'annule en la suite $\mathbf{B}$-régulière $(\dot{h}_1, \dots, \dot{h}_r) \in \mathbf{B}^r$. Par hypothèse de récurrence, il s'écrit donc $R = h_0R' + S$, où $R', S \in \mathbf{A}[\xi_1, \dots, \xi_r]$ sont homogènes et $S \in I_0$. Posons $R' = \sum_{i=1}^r T_i\xi_i$, où l'on peut supposer que les $T_i$ sont nuls ou homogènes de degré deg $P - 1$. Ainsi, $R = \xi_0 \sum_{i=1}^r h_iT_i + S'$, où $S' \in I$.

En conséquence il existe $Q' \in \mathbf{A}[\xi_0, \dots, \xi_r]$, nul ou homogène de degré deg $P - 1$, tel que $P - \xi_0 Q'$ appartient à l'idéal $I$. Par suite, $Q'(h_0, \dots, h_r)$ est nul. Une récurrence sur le degré de $P$ établit alors que $Q'$ appartient à $I$.

Ainsi, $P$ appartient bien à l'idéal $I$. D'où le résultat.

Proposition 3.2.1.10 *Soient $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, un voisinage de l'origine, et $f : \Omega \to \mathbf{C}$, une fonction analytique lisse, nulle en $0$. Soit $g \in \mathcal{O}$, un germe de fonction à singularité isolée à l'origine, dont la restriction à la sous-variété $\{f = 0\} \subset \Omega$ soit aussi à singularité isolée.*

*Alors, pour tout entier $\ell \geq 2$, l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta_\ell f^s$ est l'idéal :*

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta_\ell f^s = \mathcal{D}g^\ell + \sum_{i \neq r} \mathcal{D}\left[g(f'_{x_r}\frac{\partial}{\partial x_i} - f'_{x_i}\frac{\partial}{\partial x_r}) + \ell(f'_{x_r}g'_{x_i} - f'_{x_i}g'_{x_r})\right]$$

*où $r$ est un indice tel que $f'_{x_r}$ est inversible.*

*Preuve.* Notons $I \subset \mathcal{D}$ l'idéal de droite. Il est clair que $I \subset \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta_\ell f^s$. Montrons l'inclusion réciproque.

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $f = x_1$. Notons $\mathrm{gr}\, I \subset \mathcal{O}[\xi]$, l'idéal engendré par les symboles principaux des éléments de $I$. Remarquons que, du fait des relations dans $\mathcal{D}$ suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[g\frac{\partial}{\partial x_j} + \ell g'_{x_j}\right] - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[g\frac{\partial}{\partial x_i} + \ell g'_{x_i}\right] = (\ell - 1)(\frac{\partial}{\partial x_i}g'_{x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}g'_{x_i}) \quad (1)$$

pour $2 \leq i < j \leq n$ quand $n \geq 2$, nous avons l'inclusion :

$$\sum_{i=2}^{n} g\xi_i \mathcal{O}[\xi] + \sum_{2\leq i<j\leq n} (\xi_i g'_{x_j} - \xi_j g'_{x_i})\mathcal{O}[\xi] \subset \operatorname{gr} I \ .$$

Soit $P \in \mathcal{D}$, un opérateur non nul annulant $\delta_\ell x_1^s$. Il s'écrit :

$$P = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^r Q + R = Q' \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^r + R'$$

où $r \in \mathbf{N}$, $R, R' \in \mathcal{D}$ sont des opérateurs de degré en $(\partial/\partial x_1)$ strictement inférieur à $r$, et $Q, Q' \in \mathcal{D}$ sont non nuls, indépendants de $(\partial/\partial x_1)$, et ont le même symbole principal. Un calcul élémentaire établit l'égalité dans $\mathcal{O}[1/x_1 g, s]x_1^s$ suivante :

$$P\frac{1}{g^\ell}x_1^s = s(s-1)\cdots(s-r+1)Q'\frac{1}{g^\ell}x_1^{s-r} + vx_1^s \qquad (2)$$

où $v \in \mathcal{O}[1/x_1 g, s]$ est de degré en $s$ strictement inférieur à $r$. Comme $P$ annule $\delta_\ell x_1^s$, $Q'$ annule donc $\delta_\ell$.

Montrons alors que $Q$ appartient à l'idéal $I$. Raisonnons par récurrence sur son degré, noté $d \in \mathbf{N}$. Si $d = 0$, $Q'$ est un multiple de $g^\ell$ d'après le lemme 1.3.1.1. D'autre part, $Q$ est égal à $Q'$ ; c'est donc bien un élément de $I$.

Supposons maintenant que $d \geq 1$. Montrons que $\sigma(Q)$ appartient à $\operatorname{gr} I$. Remarquons que :

$$Q'\frac{1}{g^\ell} = (-1)^d \frac{(\ell+d-1)!}{(\ell-1)!}\frac{\sigma(Q')(g'_{x_2}, \ldots, g'_{x_n})}{g^{\ell+d}} + \frac{v}{g^{\ell+d-1}}$$

dans $\mathcal{O}[1/g]$, où $v \in \mathcal{O}$. Comme $Q'$ annule $\delta_\ell$ et $\sigma(Q) = \sigma(Q')$, le germe $\sigma(Q)(g'_{x_2}, \ldots, g'_{x_n})$ est nécessairement un multiple de $g$.

D'autre part, il résulte des hypothèses que la suite $(g, g'_{x_2} \ldots, g'_{x_n})$ est $\mathcal{O}$-régulière (voir page 81) . Ainsi, si $n = 2$, l'appartenance de $\sigma(Q)$ à $\operatorname{gr} I$ est manifeste, puisque $\sigma(Q)(g'_{x_2}) = w(g'_{x_2})^d$ est divisible par $g$ et $g\xi_2 \in \operatorname{gr} I$.

Supposons $n \geq 3$. La suite $\mathcal{O}/g\mathcal{O}$-régulière $(\dot{g}'_{x_2}, \ldots, \dot{g}'_{x_n})$ annule le polynôme homogène $\dot{\sigma}(Q) \in (\mathcal{O}/g\mathcal{O})[\xi_2, \ldots, \xi_n]$. D'après le lemme précédent, $\sigma(Q)$ appartient donc à l'idéal homogène (en $\xi$) de $\mathcal{O}[\xi_2, \ldots, \xi_n]$ engendré par $\xi_i g'_{x_j} - \xi_j g'_{x_i}$, $2 \leq i < j \leq n$, et $g$. Nous pouvons donc écrire :

$$\sigma(Q) = \sum_{2\leq i<j\leq n} A_{i,j}(\xi_i g'_{x_j} - \xi_j g'_{x_i}) + Bg$$

où $A_{i,j}$ (resp. $B$) est nul ou homogène de degré $d-1$ (resp. $d$) en $\xi_2, \ldots, \xi_n$. En particulier, $\sigma(Q) \in \operatorname{gr} I$.

Il résulte alors de l'hypothèse de récurrence que $Q$ appartient à l'idéal $I$.

Il existe donc un opérateur $U \in I$ tel que $P - U$ est de degré en $(\partial/\partial x_1)$ strictement inférieur à $r$. Une récurrence sur le degré en $(\partial/\partial x_1)$ de $P$ établit alors l'appartenance à l'idéal $I$ de l'opérateur $P$, comme souhaité.

REMARQUE 3.2.1.11 Pour calculer l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $f^s$ lorsque $f \in \mathcal{O}$ définit une singularité isolée ([Ml1] ou [Y, th. 2.19, p. 133]), on procède de façon analogue, utilisant uniquement le fait que $(f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n})$ forme une suite $\mathcal{O}$-régulière.

Par contre, le calcul de l'annulateur de $\delta f^s$ sous les hypothèses de la proposition 3.2.1.7 nécessite l'expression de la variété caractéristique de $\mathcal{D}\delta f^s$, ce qui est fort contraignant.

## 3.2.2 Le module de cohomologie locale à l'épreuve

Nous nous efforçons ici d'expliciter dans le cas du module $\mathcal{R}$ les conditions introduites au paragraphe 3.1.1, afin de vérifier si la construction qui y est faite est utilisable.

Sous nos hypothèses, l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta f^s$ fut déterminé au paragraphe précédent. Intéressons nous donc à l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta f^0$, c'est-à-dire à celui de $\delta$, $\mathcal{R}$ étant sans $f$-torsion (lemme 1.3.1.1).

### La condition (i) pour $\delta$ dans le cas des hypersurfaces

Nous allons préciser la condition **(i)** du paragraphe 3.1.1 pour $\delta \in \mathcal{R}$ lorsque $X \subset \Omega$ est une hypersurface.

Donnons d'abord deux lemmes techniques.

LEMME 3.2.2.1 *Soit $h \in \mathcal{O}$, un germe non nul. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $1/h \in \mathcal{O}[1/h]$ est engendré par des opérateurs de degré un.*

2. *L'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\dot{1}/h \in \mathcal{O}[1/h]/\mathcal{O}$ est engendré par des opérateurs de degré au plus un.*

*Preuve.* Constatons que nous avons l'identité $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \dot{1}/h = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, 1/h + \mathcal{D}h$. L'implication *1* $\Rightarrow$ *2* en résulte directement. Montrons sa réciproque.

Soit $\diamondsuit_1, \ldots, \diamondsuit_l \in \mathcal{D}$, un système de générateurs de l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \dot{1}/h$ constitué d'opérateurs de degré au plus un. Soit $P \in \mathcal{D}$, un opérateur qui annule $1/h$. En particulier, il appartient à $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \dot{1}/h$. Il existe donc $A_k \in \mathcal{D}$, $k = 1, \ldots, l$, tels que $P = \sum_{k=1}^{l} A_k \diamondsuit_k$. Aussi, il se réécrit :

$$P = \sum_{k=1}^{l} A_k (\underbrace{\diamondsuit_k - u_k h}_{\widetilde{\diamondsuit}_k}) + \sum_{k=1}^{l} A_k u_k h$$

avec $u_k = \diamondsuit_k(1/h) \in \mathcal{O}$, et $\widetilde{\diamondsuit}_k \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, 1/h$ est soit nul, soit de degré un. De plus, puisque $P$ annule $1/h$, l'opérateur $\sum_{k=1}^{l} A_k u_k$ appartient à l'idéal $\mathcal{D}(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$. En conséquence, les opérateurs $(\partial/\partial x_i)h$, $i = 1, \ldots, n$, et $\widetilde{\diamondsuit}_k$, $k = 1, \ldots, l$, engendrent $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, 1/h$. D'où le résultat.

LEMME 3.2.2.2 *Soit $g \in \mathcal{O}$, un germe de fonction holomorphe non nul et non inversible. Supposons qu'il existe un entier $\ell \in \mathbf{N}^*$ tel que l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, g^{-\ell}$ soit engendré par des opérateurs de degré un. Supposons de plus que le terme constant dans l'écriture des opérateurs avec les coefficients à droite de tout élément de l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, g^s$ soit non inversible. Alors $g$ appartient à l'idéal de ses dérivées.*

*De plus, si $H(s) \in \mathcal{D}[s]$ est un bon opérateur en $s$ de degré un qui annule $g^s$, alors $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, g^{-\ell}$ est engendré par $H(-\ell)$ et les éléments de l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, g^s$.*

*Preuve.* Soient $\diamondsuit_1, \ldots, \diamondsuit_l \in \mathcal{D}$, des opérateurs de degré un qui engendrent l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, g^{-\ell}$. Posons $\diamondsuit_k = \diamondsuit'_k + \diamond_k$, avec $\diamondsuit'_k \in \mathcal{D}(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$ de degré un, et $\diamond_k = \diamondsuit_k.1 \in \mathcal{O}$. En particulier, nous avons la relation :

$$-\ell \diamondsuit'_k(g) + \diamond_k g = 0 \tag{3}$$

pour $k = 1, \ldots, l$. Soit $P(s) \in \mathcal{D}[s]$, un bon opérateur en $s$, de degré $N \in \mathbf{N}^*$, qui annule $g^s$ ([K1, th. 6.3, p. 52]). En faisant une division euclidienne par $(s + \ell)$, il s'écrit :

$$P(s) = (s + \ell)Q(s) + P(-\ell) \tag{4}$$

où $Q(s)$ est un opérateur unitaire en $s$ de degré $N - 1$, et $P(-\ell) \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, g^{-\ell}$. Il existe donc $A_1, \ldots, A_l \in \mathcal{D}$, tels que $P(-\ell) = \sum_{k=1}^{l} A_k \diamondsuit_k$. Les identités (3) et (4) entraînent alors :

$$(s + \ell)Q(s)g^s + \frac{(s + \ell)}{\ell} \sum_{k=1}^{l} A_k \diamond_k g^s = 0 \ .$$

Ainsi, l'opérateur $P_1(s) = Q(s) + (1/\ell)\sum_{k=1}^{l} A_k \diamond_k$ annule $g^s$. Si $N \geq 2$, il se réécrit $P_1(s) = (s+\ell)Q_1(s) + P_1(-\ell)$, où $Q_1(s)$ est un opérateur unitaire en $s$ de degré $N-2$, et $P_1(-\ell)$ annule $g^{-\ell}$. Quitte à itérer le procédé, nous pouvons donc supposer que $Q(s) = 1$. En particulier, il existe dans $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, g^s$ un opérateur de la forme $1+\sum_{k=1}^{l} U_k \diamond_k$, dont le terme constant dans l'écriture avec coefficients à droite s'écrit $u = 1 + \sum_{k=1}^{l} u_k \diamond_k$. Or, par hypothèse, $u$ appartient à l'idéal maximal de $\mathcal{O}$. Ainsi, il existe au moins un indice $k$ tel que $\diamond_k$ est inversible. D'après la relation (3), $g$ appartient donc à l'idéal de ses dérivées.

En d'autres termes, il existe un bon opérateur en $s$ $H(s) \in \mathcal{D}[s]$, de degré un, qui annule $g^s$. Pour montrer le second point, il suffit de vérifier que $\diamondsuit_k \in \mathcal{D}H(-\ell) + \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, g^s$ pour tout $k = 1, \ldots, l$. En utilisant l'identité (3), on constate que $\diamondsuit_k - (1+s/\ell)\diamond_k$ annule $g^s$. Nous en déduisons alors que l'opérateur $\diamondsuit_k + (1/\ell)\diamond_k H(-\ell)$ appartient à l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, g^s$. Ce qui achève la preuve.

Nous sommes maintenant en mesure d'expliciter la condition **(i)** pour $\delta_\ell$, $\ell \in \mathbf{N}^*$, lorsque $p = 1$ et $g$ définit une singularité isolée à l'origine.

THÉORÈME 3.2.2.3 *Soit $g \in \mathcal{O}$, un germe de fonction holomorphe non constante, définissant une singularité isolée à l'origine. Soit $\ell \in \mathbf{N}^*$, un entier naturel non nul. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta_\ell$ est engendré par des opérateurs de degré au plus un.*

2. *Le germe $g$ est quasi-homogène, et la plus petite racine entière du polynôme de Bernstein de $g$ est supérieure ou égale à $-\ell$.*

3. *L'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta_\ell$ est :*

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta_\ell = \mathcal{D}g^\ell + \mathcal{D}H(-\ell) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathcal{D}\Big(g'_{x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - g'_{x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)$$

   *où $H(s) \in \mathcal{D}[s]$ est un bon opérateur en $s$ de degré un qui annule $g^s$.*

*En particulier, $g$ est quasi-homogène si et seulement si il existe un entier $\ell \in \mathbf{N}^*$ pour lequel l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta_\ell$ est engendré par des opérateurs de degré au plus un.*

*Preuve.* Rappelons que, sous notre hypothèse, $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, g^s$ est engendré par les opérateurs apparaissant le plus à droite dans l'identité de la condition *3* (cf. [Y, th. 2.19, p. 133] ou [Ml1, p. 117]). En particulier, le terme constant dans l'écriture avec coefficients à droite de tout opérateur annulant $g^s$ appartient à l'idéal jacobien de $g$. Remarquons que le résultat est évident lorsque $g$ est lisse à l'origine (puisque les trois conditions sont alors vérifiées). Supposons donc que l'origine soit un point critique de la fonction $g$.

L'implication *1* $\Rightarrow$ *2* résulte alors des deux lemmes précédents, de l'implication *5* $\Rightarrow$ *1* du lemme 1.1.2.12 appliqué à $\mathcal{M} = \mathcal{O}$ et $m = 1$, et d'un théorème de K. Saito [StK]. L'implication *2* $\Rightarrow$ *3* n'est autre que l'implication *1* $\Rightarrow$ *6* du lemme 1.1.2.12 dans notre cas particulier. Enfin, l'implication *3* $\Rightarrow$ *1* est évidente. Ce qui achève la preuve.

La condition **(i)** est donc contraignante.

### Le cas général

Vu les résultats obtenus au paragraphe précédent, nous poursuivons ici l'étude de la condition **(i)** pour $\delta$ lorsque l'application $g$ est quasi-homogène pour un même système de poids $\alpha \in (\mathbf{Q}^{*+})^n$.

Plus précisément, nous cherchons des conditions suffisantes sous lesquelles l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta$ a une expression explicite.

Rappelons qu'un polynôme $u \in \mathbf{C}[x]$ est dit *quasi-homogène* de degré $\rho \in \mathbf{Q}^+$ pour le système $\alpha$ si c'est une combinaison $\mathbf{C}$-linéaire de monômes $x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n}$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbf{N}^n$, tels que $\alpha.\gamma = \rho$.

PROPOSITION 3.2.2.4 *Soient $\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_r, h \in \mathbf{C}[x]$, des polynômes non constants, quasi-homogènes pour un système de poids $\alpha \in (\mathbf{Q}^{*+})^n$ et définissant une intersection complète à singularité isolée en 0. Notons $\tilde{\rho}$ le degré de $\tilde{h}_1 \cdots \tilde{h}_r$, et $\rho$ celui de $h$. Supposons de plus que l'application $\tilde{h} = (\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_r)$ définit aussi une intersection complète à singularité isolée à l'origine. Soit $\ell \in \mathbf{N}^*$, un entier. Posons $\mathcal{M} = \mathcal{O}[1/\tilde{h}_1 \cdots \tilde{h}_r] / \sum_{i=1}^r \mathcal{O}[1/\tilde{h}_1 \cdots \check{\tilde{h}}_i \cdots \tilde{h}_r]$ et $m \in \mathcal{M}$, la classe de $1/\tilde{h}_1 \cdots \tilde{h}_r$.*

*Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La plus petite racine entière de $b(mh^s, s)$ est supérieure ou égale à $-\ell$.*

2. *Le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{D}m[1/h]/\mathcal{D}m$ est engendré par $m\dot{h}^{-\ell}$.*

*et entraînent que :*

3. *L'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $m\dot{h}^{-\ell} \in \mathcal{D}m[1/h]/\mathcal{D}m$ est :*

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, m\dot{h}^{-\ell} = \mathcal{D}h^\ell + \sum_{i=1}^{r} \mathcal{D}\tilde{h}_i + \mathcal{D}(\chi + \tilde{\rho} + \rho\ell) + \sum_{K} \mathcal{D}\Delta_K^{\tilde{h},h} \, .$$

*où $\chi \in \mathcal{D}$ désigne l'opérateur d'Euler associé à $\alpha$, et les opérateurs $\Delta_K^{\tilde{h},h}$ sont définis à la page 84.*

Cette proposition résulte directement de la proposition 1.1.2.10, du lemme 1.1.2.12 et du calcul de l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $mh^s$ sous nos hypothèses sur $h$ et $\tilde{h}$ (proposition 3.2.1.7).

Remarque 3.2.2.5 Il est aisé de savoir si la condition *1* de cette proposition est satisfaite. En effet, nous verrons au théorème 4.2.2.1 que sous les hypothèses de la proposition 3.2.2.4, les racines du polynôme de Bernstein de $mh^s$ s'obtiennent de façon simple à partir d'une cobase quasi-homogène d'un idéal de colongueur finie (comme dans le cas classique $m = 1 \in \mathcal{O}$).

Remarque 3.2.2.6 Si $m$ n'engendre pas $\mathcal{M}$ comme $\mathcal{D}$-module, l'annulateur donné à la condition *3* de la proposition précédente ne coïncide en général pas avec celui de $\dot{m}h^\ell$ dans $\mathcal{M}[1/h]/\mathcal{M}$, comme le montre l'exemple suivant.

Soit $r = 1$, $n = 4$, $\tilde{h} = x_1^2 + \cdots + x_4^2$ et $h = x_1$. Les applications $(\tilde{h}, h)$ et $\tilde{h}$ définissent des intersections complètes à singularité isolée à l'origine. Notons $m$ la classe de $1/\tilde{h}$ dans $\mathcal{M} = \mathcal{O}[1/\tilde{h}]/\mathcal{O}$. D'après le théorème 4.2.2.1, le polynôme de Bernstein de $mh^s$ est $(s+1)(s+2)$, comme celui de $\tilde{h}^s$. En particulier, l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\dot{m}h^{-2} \in \mathcal{D}m[1/h]/\mathcal{D}m$ est donc l'idéal $I$ engendré par $x_1^2$, $x_1(\partial/\partial x_1)+\cdots+x_4(\partial/\partial x_4)+4$ et les opérateurs $x_i(\partial/\partial x_j) - x_j(\partial/\partial x_i)$, $2 \leq i < j \leq 4$.

Montrons que l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de la classe de $1/\tilde{h}h^2$ dans $\mathcal{M}[1/h]/\mathcal{M}$, notée $\eta$, n'est pas l'idéal $I$. Nous avons l'identité dans $\mathcal{M}[1/h]$ suivante :

$$\left[x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2\right] mh^{-2} = -2m_2 \tag{5}$$

où $m_2 = \dot{1}/\tilde{h}^2 \in \mathcal{M}$. En particulier, l'opérateur $x_1(\partial/\partial x_1) + 2$ annule $\eta$. Or, d'après l'équivalence *1* $\Leftrightarrow$ *4* de la proposition 1.1.2.10 appliquée à $\tilde{h}^s$, $\mathcal{D}m$ est strictement contenu dans $\mathcal{D}m_2 = \mathcal{M}$. Il résulte alors de l'identité (5) que l'opérateur $x_1(\partial/\partial x_1) + 2$ n'appartient pas à l'idéal $I$.

Nous sommes maintenant en mesure de donner des conditions suffisantes sous lesquelles l'annulateur de $\delta$ est déterminé.

Proposition 3.2.2.7 *Soient $g_1, \ldots, g_p \in \mathbf{C}[x]$, des polynômes non constants, quasi-homogènes pour un système de poids $\alpha \in (\mathbf{Q}^{*+})^n$, et tels que les applications $(g_1, \ldots, g_i)$, $i = 1, \ldots, p$, définissent des intersections complètes à singularité isolée à l'origine.*

*Supposons que $-1$ soit la plus petite racine entière du polynôme de Bernstein de $g_1^s$, et, si $p \geq 2$, de celui de la section $(\dot{1}/g_1 \cdots g_i)g_{i+1}^s$, pour tout $i = 1, \ldots, p-1$, où $\dot{1}/g_1 \cdots g_i \in \mathcal{O}[1/g_1 \cdots g_i]/\sum_{j=1}^{i} \mathcal{O}[1/g_1 \cdots \breve{g}_j \cdots g_i]$ est la classe de $1/g_1 \cdots g_i$. Notons $\delta \in \mathcal{R}$, la classe de $1/g_1 \cdots g_p$ et $\varrho \in \mathbf{Q}$, le degré de $g_1 \cdots g_p$.*

*Alors, l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta$ est :*

$$\operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} \delta = \sum_{i=1}^{p} \mathcal{D} g_i + \mathcal{D}(\chi + \varrho) + \sum_{K} \mathcal{D} \Delta_K^g$$

*où $\chi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i (\partial/\partial x_i) \in \mathcal{D}$ désigne l'opérateur d'Euler associé à $\alpha$, $g$ est l'application $(g_1, \ldots, g_p)$ et les opérateurs $\Delta_K^g$ sont définis à la page 84.*

*Preuve.* Quand $p = 1$, cela résulte du théorème 3.2.2.3. Supposons $p \geq 2$. En itérant l'implication *1* $\Rightarrow$ *2* de la proposition 3.2.2.4, nous constatons que $\mathcal{D}\, \dot{1}/g_1 \cdots g_{p-1} = \mathcal{O}[1/g_1 \cdots g_{p-1}]/\sum_{i=1}^{p-1} \mathcal{O}[1/g_1 \cdots \breve{g}_i \cdots g_{p-1}]$. Le résultat est alors une conséquence de l'implication *1* $\Rightarrow$ *3* de la proposition 3.2.2.4 appliquée à $r = p-1$, $\tilde{h}_i = g_i$, $i = 1, \ldots, r$ et $h = g_p$.

Remarquons que, sous les hypothèses de la proposition précédente, la section $\delta$ engendre le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{R}$.

Signalons enfin qu'il n'y a pas de formule analogue pour l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta_L = \dot{1}/g_1^{l_1} \cdots g_p^{l_p} \in \mathcal{R}$, $L = (l_1, \ldots, l_p) \in (\mathbf{N}^*)^p$. En effet, d'après le lemme 1.1.2.12, avec les notations de la proposition 3.2.2.4, cela nécessiterait de déterminer $\operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} m_L h^s$, $m_L \in \mathcal{M}$. Or l'exemple calculé au paragraphe 4.3.1 tend à établir qu'il n'y a pas de formule générale pour un tel annulateur (voir la remarque 4.3.1.6).

### Le bilan

Nous reprenons les hypothèses et les notations introduites au début du paragraphe 3.2.

Aux paragraphes précédents, nous nous sommes efforcés de trouver des hypothèses sur le morphisme $g$ sous lesquelles on connaît explicitement les annulateurs considérés dans les conditions du paragraphe 3.1.1 pour certains éléments de $\mathcal{R}$. Dans ce qui suit, nous vérifions si les résultats obtenus permettent de dégager des conditions sur $g$ sous lesquelles la construction du chapitre 3 est utilisable pour $\delta$ et, lorsque $p = 1$, pour $\delta_\ell$, $\ell \geq 2$.

Rappelons d'abord quelques faits :

- pour que $\delta$ satisfasse à la condition **(i)**, nous devons supposer qu'il existe un système de coordonnées dans lequel l'application $g = (g_1, \dots, g_p)$ soit quasi-homogène pour un système de poids $\alpha \in (\mathbf{Q}^{*+})^n$. C'est du moins indispensable quand $p = 1$ (théorème 3.2.2.3).

- chaque fois que nous savons déterminer l'annulateur dans $\mathcal{D}$ d'un élément de $\mathcal{R}$, il l'engendre comme $\mathcal{D}$-module (proposition 1.1.2.12).

- l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta f^s$ est déterminé sous les seules hypothèses du paragraphe 3.2.

- lorsque $p = 1$, nous n'avons de formule pour $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta_\ell f^s$, $\ell \geq 2$, que si l'application $f$ est une submersion à l'origine. Ce qui n'est guère étonnant (voir la remarque 4.3.1.6).

• Etudions maintenant les conditions du paragraphe 3.1.1 pour $\delta \in \mathcal{R}$.

Supposons vérifiées les hypothèses de la proposition 3.2.2.7. Alors la condition **(i)** est satisfaite, l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta$ étant :

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta = \sum_{i=1}^{p} \mathcal{D} g_i + \mathcal{D}(\chi + \varrho) + \sum_{K} \mathcal{D}\Delta_K^g$$

où $\chi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i (\partial/\partial x_i) \in \mathcal{D}$ et $\varrho \in \mathbf{Q}^+$ est le degré de $g_1 \cdots g_p \in \mathbf{C}[x]$. En conséquence, l'idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ associé au système de générateurs apparent contient l'idéal $J \subset \mathcal{O}$ engendré par $g_1, \dots, g_p$, et les mineurs maximaux de la matrice jacobienne de $(f, g)$. En particulier, $\mathcal{J}$ est de colongueur finie (voir page 81).

Enfin, sous nos hypothèses sur les applications $g$ et $(f, g)$, l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta f^s$ est contenu dans $\mathcal{D}J$, donc dans $\mathcal{D}\mathcal{J}$ (voir proposition 3.2.1.7).

Par suite, lorsque les hypothèses de la proposition 3.2.2.7 sont satisfaites, la construction de B. Malgrange s'applique pour $\delta$.

• Intéressons nous au cas des sections $\delta_\ell \in \mathcal{R}$, $\ell \geq 2$, lorsque l'application $f$ est lisse.

D'après le théorème 3.2.2.3, la condition **(i)** est satisfaite si et seulement si $g$ est quasi-homogène et l'entier $-\ell$ est inférieur ou égal à la plus petite racine entière de $b(g^s, s)$. Supposons donc que ce soit le cas. L'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta_\ell$ est alors l'idéal :

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta_\ell = \mathcal{D} g^\ell + \mathcal{D} H(-\ell) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathcal{D}(g'_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - g'_{x_j} \frac{\partial}{\partial x_i})$$

où $H(s) \in \mathcal{D}[s]$ est un bon opérateur en $s$ de degré un qui annule $g^s$. Remarquons qu'il n'est pas manifeste que le système de générateurs donné convienne pour la condition **(ii)**. Aussi, considérons un système de générateurs de $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\delta_\ell$ comprenant $g^\ell$, $H(-\ell)$, les opérateurs $g'_{x_i}(\partial/\partial x_j)-g'_{x_j}(\partial/\partial x_i)$, $i\neq j$, et $g(\partial/\partial x_i)+\ell g'_{x_i}$, $i=1,\dots,n$. L'idéal $\mathcal{J}$ associé contient donc les mineurs maximaux de la matrice jacobienne de l'application $(f,g)$, et aussi $g$ (puisque l'application $f$ est lisse). En particulier, $\mathcal{J}$ est de colongueur finie (voir page 81) ; de plus, il résulte de la proposition 3.2.1.10 que la condition **(iii)** est satisfaite.

En conséquence, étant données des fonctions analytiques non constantes $f,g$, définies sur un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$, telles que $f$ soit une submersion en zéro et les applications $g$, $(f,g)$ définissent des intersections complètes à singularité isolée à l'origine, la construction de la section 3.1 s'applique pour $\delta_\ell$, $\ell\in\mathbf{N}^*$, si et seulement si $g$ est quasi-homogène et $-\ell$ est inférieur ou égal à la plus petite racine entière du polynôme de Bernstein de $g^s$.

Nous avons donc montré le résultat suivant :

Théorème 3.2.2.8 *Soient $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ un voisinage de l'origine, $g=(g_1,\dots,g_p)$ et $(f,g)$ deux applications analytiques définies sur $\Omega$ et définissant des intersections complètes à singularité isolée à l'origine. Dans les situations suivantes, les conditions* **(i)-(iii)** *sont satisfaites pour l'élément $u\in\mathcal{R}$ alors précisé :*

- **(a)** *il existe un système de coordonnées dans lequel l'application $g$ est quasi-homogène ; si $p\geq 2$, les applications $(g_1,\dots,g_i)$, $i=2,\dots,p$, définissent des intersections complètes à singularité isolée à l'origine ; l'entier $-1$ est la plus petite racine entière du polynôme de Bernstein de $g_1^s$, et, si $p\geq 2$, de celui de la section $(\dot{1}/g_1\cdots g_i)g_{i+1}^s$, pour tout $i=1,\dots,p-1$, où $\dot{1}/g_1\cdots g_i\in\mathcal{O}[1/g_1\cdots g_i]/\sum_{j=1}^{i}\mathcal{O}[1/g_1\cdots\check{g}_j\cdots g_i]$ ; $u=\dot{1}/g_1\cdots g_p\in\mathcal{R}$.*
- **(b)** *la fonction $f$ est lisse à l'origine, $g$ est une fonction quasi-homogène, et $u\in\mathcal{R}$ est défini à partir de $1/g^\ell$, où $\ell\in\mathbf{N}^*$ est un entier tel que la plus petite racine entière du polynôme de Bernstein de $g$ est supérieure ou égale à $-\ell$.*

*De plus lorsque $p=1$, les hypothèses supplémentaires sur $g$ sont nécessaires.*

Remarque 3.2.2.9 La condition **(i)** pour la section $\delta\in\mathcal{R}$ étant très restrictive, on peut être tenté de construire à partir de $g$ un $\mathcal{D}$-module holonome régulier 'voisin' de $\mathcal{D}\delta$, pour lequel cette condition est satisfaite sous la seule hypothèse que $g$ définisse une intersection complète à singularité isolée à l'origine.

L'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\delta$ contenant $g_1, \ldots, g_p$, et les opérateurs $\Delta_K^g$ définis à la page 84, il est alors naturel de considérer le $\mathcal{D}_\Omega$-Module :

$$\mathcal{S}_\Omega = \frac{\mathcal{D}_\Omega}{\mathcal{D}_\Omega(g_1, \ldots, g_p, \{\Delta_K^g\}_K)} \ .$$

Notons $\overline{\delta}$, la classe de $1 \in \mathcal{D}_\Omega$, et $\mathcal{S}$ la fibre à l'origine de $\mathcal{S}_\Omega$. Nous avons une suite exacte naturelle de $\mathcal{D}_\Omega$-Modules :

$$0 \to \mathcal{B}_\Omega \longrightarrow \mathcal{S}_\Omega \longrightarrow \mathcal{D}_\Omega\delta \to 0$$

L'espace $X$ ayant une singularité isolée à l'origine, il est facile de vérifier que le $\mathcal{D}_\Omega$-Module $\mathcal{B}_\Omega$ est supporté par l'origine. En particulier, $\mathcal{S}_\Omega$ est un $\mathcal{D}_\Omega$-Module holonome régulier, de cycle caractéristique :

$$\mathrm{Car}(\mathcal{S}_\Omega) = T_X^*\Omega + vT_{\{0\}}^*\Omega$$

pour un entier $v$. D'après la remarque 3.2.1.8, l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\overline{\delta} f^s$ coïncide avec celui de $\delta f^s$.

Toutefois, la condition **(i)** n'est en général pas satisfaite pour $\overline{\delta}$. En effet, constatons que $\mathcal{B}_{\Omega,0} = (\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\delta)\overline{\delta} \subset \mathcal{S}$ est le sous-module de $f$-torsion de $\mathcal{S}$ (puisque $\mathcal{B}_\Omega$ est supporté par l'origine). Par suite, l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\overline{\delta} f^0$ contient toujours l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\delta$. Ce qui rend patente l'inutilité du module $\mathcal{S}$.

Remarque 3.2.2.10 Au chapitre 2, nous n'avons pas établi de généralisation du fait que le polynôme de Bernstein générique d'une déformation $F$ à $k$ paramètres d'une singularité isolée d'hypersurface coïncide avec le 'polynôme de Bernstein de la fibre générique' (ppcm des polynômes de Bernstein en chaque point de $F_{\mathbf{y}}^{-1}(0)$ pour $\mathbf{y}$ général) ([B.Ge.M, th. 3.4, p. 31] qui généralise [Ge2, th. 7.4]).

En effet, ces preuves s'appuient sur des variantes faisceautiques (et relatives) de la construction donnée par B. Malgrange dans [Ml1]. Notre impuissance à étendre ces résultats est donc due à la très contraignante condition **(i)** du paragraphe 3.1.1, seuls quelques rares cas étant alors accessibles (voir 4.1.3.7, 4.1.5.1).

# Chapitre 4

# Polynôme de Bernstein d'une fonction sur une intersection complète quasi-homogène à singularité isolée

Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Notons $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$, la $\mathbf{C}$-algèbre des germes à l'origine de fonctions holomorphes, $\mathbf{C}[x]$, celle des polynômes en $x_1, \ldots, x_n$, $\mathcal{D} = \mathcal{O}\langle \partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n \rangle$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathcal{O}$, et $\mathcal{D}[s] = \mathcal{D} \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[s]$, où $s$ est une indéterminée.

Fixons $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbf{Q}^{*+})^n$, un $n$-uplet de rationnels strictement positifs. Notons $\chi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i (\partial/\partial x_i) \in \mathcal{D}$, l'opérateur d'Euler associé.

Rappelons qu'un polynôme $u \in \mathbf{C}[x]$ est dit *quasi-homogène* de degré $\rho \in \mathbf{Q}^+$ pour le système $\alpha$ si c'est une combinaison $\mathbf{C}$-linéaire non triviale de monômes $x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n}$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbf{N}^n$, tels que $\alpha.\gamma = \rho$.

Soit $g = (g_1, \ldots, g_p) : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^p$, une application polynomiale non constante, nulle à l'origine, quasi-homogène pour le système de poids $\alpha$, et définissant au voisinage de l'origine une intersection complète $X \subset \mathbf{C}^n$ à singularité isolée en 0. Notons $\varrho \in \mathbf{Q}^{*+}$, le degré de $g_1 \cdots g_p \in \mathbf{C}[x]$.

Soit $\mathcal{R}$, le groupe de cohomologie locale algébrique de $\mathcal{O}$ à support dans $X$ :

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{O}[1/g_1 \cdots g_p]}{\sum_{i=1}^p \mathcal{O}[1/g_1 \cdots \check{g}_i \cdots g_p]} \quad .$$

Notons $\delta$ la classe de $1/g_1 \cdots g_p$ dans $\mathcal{R}$, et, pour tout $L = (l_1, \cdots, l_p) \in (\mathbf{N}^*)^p$, $\delta_L \in \mathcal{R}$ celle de $1/g_1^{l_1} \cdots g_p^{l_p}$.

Soient $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, un voisinage de l'origine, et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$, une fonction analytique, nulle en zéro, telle que l'application $(f, g)$ définisse une intersection complète.

Dans ce chapitre, nous nous efforçons d'établir l'expression explicite du polynôme de Bernstein des sections $\delta_L f^s$, et plus particulièrement de $\delta f^s$, lorsque l'application $(f, g)$ est semi-quasi-homogène (c'est-à-dire ici, telle que l'application $(\mathrm{in}(f), g)$ définit une intersection complète à singularité isolée à l'origine). La construction faite au chapitre 3 sera notre outil maître.

Dans un premier temps, nous généralisons au cas de la section $\delta f^s$ l'algorithme de calcul du polynôme de Bernstein développé dans [B.G.M.M]. En guise d'application, nous donnons des calculs de déformations semi-quasi-homogènes génériques en dimension deux. Puis nous étudions en détail le cas particulier des applications $(f, g)$ quasi-homogènes à singularité isolée. Cette étude s'achève sur des calculs d'exemples mettant en évidence les limites de l'approche suivie.

# 4.1 Algorithme de calcul de $b(\delta f^s, s)$

## 4.1.1 Le cadre

Avant de préciser le cadre de cette section, donnons quelques notions préliminaires.

### Partie initiale associée à un système de poids

Associons à $\alpha$ une fonction d'ordre $\rho : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbf{Q}^+ \cup \{+\infty\}$, définie par $\rho(0) = +\infty$ et, si $u \in \mathcal{O} - \{0\}$ :

$$\rho(u) = \min\{\alpha.\gamma = \alpha_1\gamma_1 + \cdots + \alpha_n\gamma_n \,|\, u_\gamma \neq 0\}$$

où $u = \sum_\gamma u_\gamma x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n}$ avec $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbf{N}^n$.

NOTATIONS

Pour tout rationnel $q \in \mathbf{Q}$, notons $\mathcal{O}_q \subset \mathbf{C}[x]$, le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des polynômes quasi-homogènes de degré $q$, et $\mathcal{O}_{\geq q}$ (resp. $\mathcal{O}_{>q}$) l'idéal de $\mathcal{O}$ des fonctions d'ordre supérieur (resp. strictement supérieur) à $q$.

En particulier, pour $q$ strictement négatif, $\mathcal{O}_{>q} = \mathcal{O}_{\geq q} = \mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_q = \{0\}$.

Remarquons que les idéaux $\mathcal{O}_{\geq q}$, $q \in \mathbf{Q}$, forment une filtration décroissante de $\mathcal{O}$. Le gradué associé :

$$\operatorname{gr}\mathcal{O} = \bigoplus_{q\in\mathbf{Q}^+} \frac{\mathcal{O}_{\geq q}}{\mathcal{O}_{>q}}$$

s'identifie à l'anneau $\mathbf{C}[x] = \oplus\, \mathcal{O}_q$.

DÉFINITION 4.1.1.1 *Soit* $u \in \mathcal{O} - \{0\}$. *On appelle* partie initiale *de* $u$ *pour le système* $\alpha$, *le polynôme quasi-homogène, noté* $\operatorname{in}(u)$, *défini par :*

$$\operatorname{in}(u) = \sum_{\alpha.\gamma=\rho(u)} u_\gamma x_1^{\gamma_1}\cdots x_n^{\gamma_n}$$

*si* $u = \sum_{\gamma\in\mathbf{N}^n} u_\gamma x_1^{\gamma_1}\cdots x_n^{\gamma_n}$.

DÉFINITION 4.1.1.2 *Soit* $I \subset \mathcal{O}$, *un idéal non nul. On appelle* idéal initial *de* $I$ *pour le système* $\alpha$, *et on note* $\operatorname{in}(I)$, *l'idéal de* $\mathbf{C}[x]$ *engendré par les parties initiales des éléments non nuls de* $I$.

### Théorème de division par un idéal de colongueur finie

Enonçons une version du théorème de division par un idéal de colongueur finie, avec contrôle de l'ordre sans unicité des quotients (cf. [Br1]).

THÉORÈME 4.1.1.3 ([MD1], TH II.1.1.1, P. 69) *Soit* $I \subset \mathcal{O}$, *un idéal de colongueur finie. Soient* $h_1, \dots, h_r$, *des éléments de l'idéal* $I$ *dont les parties initiales engendrent* $\operatorname{in}(I)$. *Soient* $e_1, \dots, e_m$, *des polynômes quasi-homogènes dont les classes forment une base de* $\mathbf{C}[x]/\operatorname{in}(I)$.

*Alors, pour tout* $u \in \mathcal{O}$, *il existe* $v_1, \dots, v_r \in \mathcal{O}$, *et des nombres complexes* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, *uniques, tels que :*

$$u = \sum_{i=1}^{r} v_i h_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j$$

*avec* $\rho(v_i h_i) \geq \rho(u)$ *pour tout* $i = 1, \dots, r$, *et* $\lambda_j = 0$ *ou* $\rho(e_j) \geq \rho(u)$ *pour tout* $j = 1, \dots, m$.

REMARQUE 4.1.1.4 Il est facile de constater que lorsque un idéal $I \subset \mathcal{O}$ est de colongueur finie, son idéal initial l'est aussi.

De plus, ces idéaux ont même colongueur. Cela résulte du théorème de division, et du lemme classique suivant (voir [Md1, lem. II.1.1.3, p. 70] par exemple).

LEMME 4.1.1.5 *Soient* $h_1, \dots, h_m$, *des éléments d'un idéal* $I \subset \mathcal{O}$ *dont les parties initiales forment un système de générateurs de* $\operatorname{in}(I)$. *Alors* $h_1, \dots, h_m$ *engendrent l'idéal* $I$.

### Quelques propriétés des applications semi-quasi-homogènes

Donnons tout d'abord la définition.

DÉFINITION 4.1.1.6 *Soient $h_1, \dots, h_r$, $r \geq 1$, des fonctions analytiques définies sur un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$. L'application $(h_1, \dots, h_r)$ est dite* semi-quasi-homogène *pour le système de poids $\alpha \in (\mathbf{Q}^{*+})^n$ si les parties initiales des germes à l'origine des fonctions $h_1, \dots, h_r$, définissent une intersection complète à singularité isolée en zéro.*

Rappelons maintenant quelques propriétés bien connues.

PROPOSITION 4.1.1.7 ([GR.H], PROP. 5.1, [MD1], PROP. II.1.2.2.2) *Une application semi-quasi-homogène définit une intersection complète à singularité isolée à l'origine.*

PROPOSITION 4.1.1.8 ([GR.H], PROP. 5.1, [MD1], PROP. II.1.2.2.6) *Soit $h = (h_1, \dots, h_r)$ une application semi-quasi-homogène définie sur un voisinage de l'origine. Le germe d'intersection complète à singularité isolée défini par $h$ a même nombre de Milnor que $(V(\mathrm{in}(h_1), \dots, \mathrm{in}(h_r)), 0)$.*

Pour finir, donnons une généralisation due à J. Briançon de la formule de Greuel du nombre de Milnor d'une intersection complète quasi-homogène à singularité isolée ([Gr, cor. 5.8, p. 264]).

THÉORÈME 4.1.1.9 *Soit $(h_1, \dots, h_r)$ une application analytique, définie sur un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$, semi-quasi-homogène pour le système de poids $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbf{Q}^{*+})^n$. Alors le nombre de Milnor à l'origine du germe d'intersection complète à singularité isolée défini par $(h_1, \dots, h_r)$ est*

$$\mu(h_1, \dots, h_r) = \mathrm{col}((\chi(h_1), \dots, \chi(h_r))\mathcal{O} + J(h_1, \dots, h_r)) \qquad (1)$$

*où $\chi = \alpha_1 x_1(\partial/\partial x_1) + \dots + \alpha_n x_n(\partial/\partial x_n) \in \mathcal{D}$ est l'opérateur d'Euler associé au système $\alpha$, et $J(h_1, \dots, h_r) \subset \mathcal{O}$ est l'idéal engendré par les mineurs maximaux de la jacobienne de l'application $(h_1, \dots, h_r)$.*

*Preuve.* La démonstration recopie la preuve de la formule de Greuel donnée par H. Maynadier dans [Md1]. Rappelons en les grandes étapes.

En reprenant [Md1, prop. II.1.2.2.3, p. 74], on montre d'abord que si $(h_1, \dots, h_r)$ et $(h_1, \dots, h_r, q)$ sont semi-quasi-homogènes alors l'idéal $(\chi(h_1), \dots \chi(h_r))\mathcal{O} + J(h_1, \dots, h_r, q)$ a pour colongueur $\mu(h_1, \dots, h_r) + \mu(h_1, \dots, h_r, q)$.

Puis on établit le résultat suivant :

Lemme d'échange ([Md1, I.2.3, p. 27]) *Si* $(h_1, \ldots, h_r, q)$, $(h_1, \ldots, h_r, h)$, $(h_1, \ldots, h_r, q, h)$ *sont semi-quasi-homogènes et si la formule* (1) *est vérifiée pour* $(h_1, \ldots, h_r, q)$, $(h_1, \ldots, h_r, q, h)$, *alors elle l'est aussi pour* $(h_1, \ldots, h_r, h)$.

Le théorème se montre alors par récurrence sur l'entier $n - r \in \mathbf{N}$, en utilisant astucieusement le lemme d'échange et le lemme de construction de M. Giusti (voir [Md1, th. I.2.5, p.29]).

Lemme de construction ([Gs, cor. 2.5]) *Si* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{r-1}, \varphi)$, $r \leq n-1$, *définit une intersection complète à singularité isolée à l'origine de* $\mathbf{C}^n$, *quasi-homogène pour un système de poids* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in (\mathbf{N}^*)^n$, *et si* $\rho \in \mathbf{N}^*$ *est un multiple de* $\beta_1, \ldots, \beta_n$, *alors pour* $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ *génériques dans* $\mathbf{C}^n$, *le polynôme* $\psi = \sum \lambda_i x_i^{\rho/\alpha_i}$ *est tel que* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{r-1}, \varphi, \psi)$ *et* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{r-1}, \psi)$ *définissent des intersections complètes quasi-homogènes à singularité isolée.*

Pour finir, traitons le cas $r = n$, premier pas de la récurrence.

L'application $(h_1, \ldots, h_n)$ étant semi-quasi-homogène, les éléments $\mathrm{in}(h_1) = \mathrm{in}(\chi(h_1)), \ldots, \mathrm{in}(h_n) = \mathrm{in}(\chi(h_n))$ forment une suite régulière. D'après le lemme 4.3.2.5, ils engendrent donc l'idéal $\mathrm{in}((h_1, \ldots, h_n)\mathcal{O}) = \mathrm{in}((\chi(h_1), \ldots, \chi(h_n))\mathcal{O})$. Par suite, les idéaux de définition $(h_1, \ldots, h_n)\mathcal{O}$ et $(\chi(h_1), \ldots, \chi(h_n))\mathcal{O}$ ont même colongueur (remarque 4.1.1.4). En conséquence :

$$\mu(h_1, \ldots, h_n) = \mathrm{col}((\chi(h_1), \ldots, \chi(h_n))\mathcal{O}) - 1 \tag{2}$$

Rappelons enfin que le jacobien $\det(\chi(h_1), \ldots, \chi(h_n))$ engendre le socle de l'algèbre Artinienne $\mathcal{O}/(\chi(h_1), \ldots, \chi(h_n))$. Le jacobien de l'application $(h_1, \ldots h_n)$ l'engendre donc aussi, ces deux éléments ayant même partie initiale. L'assertion résulte alors de l'identité (2).

### Le cadre

Nous reprenons les hypothèses sur le morphisme $g$ faites en début de chapitre.

Soient $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, un voisinage de l'origine, et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une application analytique, nulle en zéro, telle que l'application $(f, g)$ soit semi-quasi-homogène.

Quitte à diviser les poids du système $\alpha$ par $\rho(f)$, nous pouvons supposer que $f$ est d'ordre un.

• Nous supposerons que l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta$ est l'idéal à gauche engendré par $g_1, \ldots, g_p$, $\chi + \varrho$, et les opérateurs $\Delta_K^g$ définis à la page 84.

Rappelons que cela est vérifié sous certaines hypothèses sur le morphisme $g$ (proposition 3.2.2.7).

L'application $(f,g)$ étant semi-quasi-homogène, elle définit en particulier une intersection complète à singularité isolée à l'origine (proposition 4.1.1.7). Comme $X$ en est également une, d'après l'étude faite en page 94, les résultats de la section 3.1 s'appliquent à $\delta f^s$.

En particulier, l'idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ de colongueur finie associé au système de générateur de $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\delta$ donné plus haut est engendré par $g_1, \dots,\ g_p, \chi(f)$, et les mineurs maximaux de la matrice jacobienne de $(f,g)$, notés $\Delta^g_K(f)$, où $\kappa = (k_1, \dots, k_{p+1}) \in \{1, \dots, n\}^{p+1}$, $1 \leq k_1 < \cdots < k_{p+1} \leq n$, en accord avec la notation introduite à la page 84.

• Constatons que l'idéal initial de $\mathcal{J}$ est engendré par $g_1, \dots, g_p$, $\mathrm{in}(f)$ et les $\Delta^g_K(\mathrm{in}(f))$, mineurs maximaux de la jacobienne de $(g_1, \dots, g_p, \mathrm{in}(f))$. En effet, d'après la formule de Greuel ([Gr, cor. 5.8, p. 264]), cet idéal - qui est contenu dans $\mathrm{in}(\mathcal{J})$ - a pour colongueur le nombre de Milnor à l'origine de l'intersection complète à singularité isolée définie par $(\mathrm{in}(f), g)$. Aussi, il a même colongueur que l'idéal $\mathcal{J}$ (proposition 4.1.1.8, théorème 4.1.1.9), donc que l'idéal $\mathrm{in}(\mathcal{J})$ (remarque 4.1.1.4). D'où l'assertion.

Remarque 4.1.1.10 En conséquence, l'idéal $\mathcal{J}$ coïncide avec :

$$(g_1, \dots, g_p, \chi(f), \{\Delta^g_K(f)\}_{K \in \mathcal{K}})\mathcal{O}$$

où $\mathcal{K}$ désigne l'ensemble des multi-indices $\kappa = (k_1, \dots, k_{p+1}) \in (\mathbf{N}^*)^{p+1}$ pour lesquels $\Delta^g_K(f)$ est d'ordre $\varrho + 1 - \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_{k_i}$. Cela résulte lemme 4.1.1.5.

• Pour établir l'expression du polynôme de Bernstein de $\delta f^s$, nous expliciterons la construction de la section 3.1, en adaptant l'algorithme développé dans [B.G.M.M]. Conservons les notations alors introduites.

Notations

Pour tout $q \in \mathbf{Q}$, soit $E_q \subset \mathcal{O}_q$, un supplémentaire de $\mathrm{in}(\mathcal{J}) \cap \mathcal{O}_q$. Posons $E = \bigoplus_{q \in \mathbf{Q}} E_q \subset \mathrm{gr}\,\mathcal{O} = \mathbf{C}[x]$. C'est un supplémentaire de $\mathrm{in}(\mathcal{J})$ dans $\mathbf{C}[x]$, donc, d'après le théorème de division, de $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{O}$.

Pour tout $q \in \mathbf{Q}$, notons $E_{\geq q}$ (resp. $E_{>q}$), le sous-espace vectoriel $\bigoplus_{q' \geq q} E_{q'}$ (resp. $\bigoplus_{q' > q} E_{q'}$) de $E$, et $DE_q$ (resp. $DE_{\geq q}$, $DE_{>q}$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$ engendré par les $\partial^\beta e$, $e \in E_q$ (resp. $E_{\geq q}$, $E_{>q}$). Notons aussi :

$$d(q) = \dim_{\mathbf{C}} E_q\ ,\ \Pi = \{q \in \mathbf{Q} \,|\, d(q) \neq 0\} \subset \mathbf{Q}^+\ ,\ \sigma = \max\{q \in \mathbf{Q}^+ \,|\, q \in \Pi\}\ ,$$

et $\aleph \in \mathbf{N}$, le plus petit majorant entier de $\sigma$.

Posons enfin $h = f - \chi(f)$. Remarquons que $\rho(h) > \rho(f) = 1$.

Dans tout ce qui suit, chaque fois que nous évoquerons le théorème de division, ce sera par l'idéal $\mathcal{J}$.

### 4.1.2 Montée de l'ordre et réécriture

Les lemmes suivants sont à la base de l'algorithme développé aux paragraphes 4.1.3 et 4.1.4.

LEMME 4.1.2.1 *Pour tout $u \in \mathcal{O}$ non nul et $i \in \mathbf{N}$ :*

$$(s - \varrho + |\alpha| + \rho(u) - i)u\delta\xi_i \in \mathcal{DO}_{>\rho(u)}\delta\xi_i + \mathcal{DO}_{\geq\rho(u)+\rho(h)}\delta\xi_{i+1}$$

*Preuve.* Rappelons que $\chi = \overline{\chi} - |\alpha|$ où $\overline{\chi}$ est l'opérateur $\sum_{i=1}^n \alpha_i(\partial/\partial x_i)x_i$, et que $\chi + \varrho$ annule $\delta$. Nous avons alors l'identité suivante dans $\mathcal{D}_{x,t}\delta f^s$ :

$$(\overline{\chi} - |\alpha|)u\delta\xi_i = \chi(u)\delta\xi_i - \varrho u\delta\xi_i + \chi(f)u\delta\xi_{i+1} \ .$$

En utilisant que $\chi(f) = f - h$ et la relation $f\delta\xi_{i+1} = (s-i)\delta\xi_i$ dans cette équation, on obtient facilement l'identité :

$$(s - \varrho + |\alpha| + w)u\delta\xi_i = [\overline{\chi}u + [(w+i)u - \chi(u)]]\delta\xi_i + uh\delta\xi_{i+1} \tag{3}$$

Le résultat s'en déduit aisément.

Donnons une version 'filtrée' de la proposition 3.1.1.5.

LEMME 4.1.2.2 *Soit $q \in \mathbf{Q}$. Il y a les inclusions dans $\mathcal{D}_{x,t}\delta f^s$ suivantes :*

$$\begin{aligned} \mathcal{DO}_{\geq q}\delta\xi_i &\subset \mathcal{DO}_{\geq q-1}\delta\xi_{i-1} \oplus DE_{\geq q}\delta\xi_i \quad \textit{pour} \quad i \geq 1 \\ \mathcal{DO}_{\geq q}\delta\xi_0 &\subset \mathcal{DJ}_{\geq q}\delta f^s \oplus DE_{\geq q}\delta\xi_0 \end{aligned}$$

*où $\mathcal{J}_{\geq q} = \mathcal{J} \cap \mathcal{O}_{\geq q}$. En particulier, pour tout entier $N \in \mathbf{N}$ :*

$$\sum_{i=0}^{N} \mathcal{DO}_{\geq q+i}\delta\xi_i = \mathcal{DJ}_{\geq q}\delta f^s \oplus \bigoplus_{i=0}^{N} DE_{\geq q+i}\delta\xi_i$$

*Preuve.* La décomposition en somme directe dans les termes de droite s'établit de la même façon qu'à la proposition 3.1.1.5. Soit $u \in \mathcal{O}_{\geq q}$. D'après le théorème 4.1.1.3 et la remarque 4.1.1.10, il s'écrit :

$$u = v + \nu\chi(f) + \sum_{K \in \mathcal{K}} \lambda_K \Delta_K^g(f) + w$$

avec $v \in (g_1, \ldots , g_p)\mathcal{O}$, $\nu, \lambda_K \in \mathcal{O}$, $\rho(\nu) \geq \rho(u) - 1$, $\rho(\lambda_K) \geq \rho(u) - \varrho - 1 + \sum_{j=1}^{p+2} \alpha_{k_j}$, $w \in E_{\geq q}$. Ainsi, pour tout $i \in \mathbf{N}$ :

$$u\delta\xi_i = \left[ \nu\chi(f) + \sum_{K\in\mathcal{K}} \lambda_K \Delta_K^g(f) \right] \delta\xi_i + w\delta\xi_i \ .$$

Cela donne le résultat lorsque $i = 0$. Pour $i \geq 1$, nous avons de plus les identités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \nu\chi(f)\delta\xi_i & = & [(\overline{\chi} - |\alpha| + \varrho)\nu - \chi(\nu)]\delta\xi_{i-1} \\ \lambda_K\Delta_K^g(f)\delta\xi_i & = & [\Delta_K^g\lambda_K - \Delta_K^g(\lambda_K)]\delta\xi_{i-1} \end{array}$$

où $\kappa \in \mathcal{K}$ (qui ne sont autres que des illustrations de l'identité (4), page 75).

En utilisant les relations sur les ordres de $\nu$ et des $\lambda_K$ données plus haut, nous établissons facilement que les coefficients dans l'écriture avec coefficients à droite des opérateurs apparaissant dans les membres de droite sont d'ordre supérieur ou égal à $\rho(u) - 1$. D'où le résultat annoncé.

Remarque 4.1.2.3 Si $P = \sum_\beta \partial^\beta p_\beta$ est un opérateur différentiel non nul, appelons *ordre* de $P$, et notons $\rho(P)$, le rationnel définit par :

$$\rho(P) = \min\{\rho(p_\beta) - \alpha.\beta\} \ .$$

D'après le lemme précédent, pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, $P\delta\xi_i = Q\delta\xi_{i-1} + R\delta\xi_i$ où $R \in DE$, $\rho(Q) \geq \rho(P)-1$, $\rho(R) \geq \rho(P)$, $\deg Q \leq \deg P+1$ et $\deg R \leq \deg P$. Ainsi, pour tout $i \in \mathbf{N}$, les opérateurs apparaissant dans la réécriture de $P\delta\xi_i$

$$Q\delta f^s + \sum_{j=0}^{i} R_j\delta\xi_j \in \mathcal{D}\mathcal{J}\delta f^s \oplus \bigoplus_{j\geq 0} DE\delta\xi_j$$

satisfont aux relations :

$$\rho(Q) \geq \rho(P) - i \ , \ \deg Q \leq \deg P + i$$

$$\rho(R_j) - j \geq \rho(P) - i \ , \ \deg R_j \leq \deg P + i - j$$

pour tout $j$, $0 \leq j \leq i$.

### 4.1.3 Filtrations et polynôme de Bernstein de $\delta f^s$

Reprenons les notations introduites au paragraphe 3.1.2. Définissons sur $\bigoplus_{i\geq 0} E\delta\xi_i$ la fonction d'ordre $\rho$ en posant :

$$\rho(\sum u_i\delta\xi_i) = \min\{\rho(u_i) - i\} \ .$$

Elle induit la filtration décroissante :

$$(\bigoplus_{i\geq 0} E\delta\xi_i)_{\geq q} = \bigoplus_{i\geq 0} E_{\geq q+i}\delta\xi_i$$

où $q \in \mathbf{Q}$. Les espaces $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}'$ et $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$ sont alors munis des filtrations induites. En prenant les gradués associés, nous avons les injections :

$$\mathrm{gr}\,\mathcal{Z} \ \hookrightarrow \mathrm{gr}\,\mathcal{Z}' \hookrightarrow \mathrm{gr}\,(\bigoplus_{i\geq 0} E\delta\xi_i) \approx \bigoplus_{q}(\bigoplus_{i\geq 0} E_{q+i}\delta\xi_i)$$

DÉFINITION 4.1.3.1 *Soit* $U = \sum u_i\delta\xi_i \in \bigoplus_{i\geq 0} E\delta\xi_i - \{0\}$. *On appelle* partie initiale *de* $U$ *l'élément de* $\bigoplus_{i\geq 0} E_{\rho(U)+i}\delta\xi_i$, *noté* $\mathrm{in}(U)$, *défini par :*

$$\mathrm{in}(U) = \sum_{\rho(u_i)-i=\rho(U)} \mathrm{in}(u_i)\delta\xi_i \ .$$

Si $G \subset \bigoplus_{i\geq 0} E\delta\xi_i$ est un sous-espace vectoriel non nul, nous noterons $\mathrm{in}(G)$ le sous-espace de $\bigoplus_q(\bigoplus_{i\geq 0} E_{q+i}\delta\xi_i)$ engendré par les parties initiales des vecteurs non nuls de $G$.

Pour tout rationnel $q \in \mathbf{Q}$, posons :

$$\mathcal{Z}_q = \ \mathrm{in}(\mathcal{Z}) \cap (\bigoplus_{i\geq 0} E_{q+i}\delta\xi_i) \ , \ \mathcal{Z}'_q = \ \mathrm{in}(\mathcal{Z}') \cap (\bigoplus_{i\geq 0} E_{q+i}\delta\xi_i)$$

REMARQUE 4.1.3.2 En particulier, tout rationnel $q$ tel que $\mathcal{Z}'_q$ ou $\mathcal{Z}_q$ n'est pas nul est contenu dans l'ensemble $\{q \in \mathbf{Q}^+ \mid \exists i \in \mathbf{N},\ q+i \in \Pi\}$, le fait que $q$ soit positif résultant de la définition même de $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}'$ et des lemmes 4.1.2.1, 4.1.2.2. Dans ce qui suit, cet ensemble est noté $(-\mathbf{N}+\Pi) \cap \mathbf{Q}^+$.

Nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{gr}\,\mathcal{Z} & \hookrightarrow & \mathrm{gr}\,\mathcal{Z}' & \hookrightarrow & \mathrm{gr}\,(\bigoplus_{i\geq 0} E\delta\xi_i) \\
\| & & \| & & \| \\
\bigoplus_q \mathcal{Z}_q & \subset & \bigoplus_q \mathcal{Z}'_q & \subset & \bigoplus_q(\bigoplus_{i\geq 0} E_{q+i}\delta\xi_i)
\end{array}$$

REMARQUE 4.1.3.3 Pour tout rationnel $q \in \mathbf{Q}^+$, nous avons une décomposition $\mathcal{Z}'_q = E_q\delta f^s \oplus \eta(\mathcal{Z}_{q+1})$, où $\eta$ est la bijection $\mathbf{C}$-linéaire de $\bigoplus_{i\geq 0} DE\delta\xi_i$ dans $\bigoplus_{i\geq 1} DE\delta\xi_i$ obtenue par restriction de $d/dt$. Cela résulte directement du lemme 3.1.2.3.

Lemme 4.1.3.4 *L'action de $s$ sur $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$ respecte la filtration induite par $\rho$ et induit une action de degré zéro sur* $\mathrm{gr}\,\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$.

*Preuve.* Soient $i \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{Q}^+$ et $u \in E_{q+i}$. Alors $su\delta\xi_i = iu\delta\xi_i + uf\delta\xi_{i+1}$. Comme $uf \in \mathcal{O}_{\geq q+i+1}$, il résulte du lemme 4.1.2.2 que $c(su\delta\xi_i) \in \bigoplus_{j=0}^{i+1} E_{\geq q+j}\delta\xi_j$. L'assertion s'en déduit.

Remarque 4.1.3.5 Pour tout $q \in \mathbf{Q}^+$, l'endomorphisme de $\mathrm{gr}_q\,\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$ induit par la multiplication par $(s - \varrho + |\alpha| + q)$ est nul. Cela résulte directement des lemmes 4.1.2.1 et 4.1.2.2.

Théorème 4.1.3.6 *Soient $g_1, \dots, g_p \in \mathbf{C}[x]$, des polynômes non constants, quasi-homogènes pour un système de poids $\alpha \in (\mathbf{Q}^{+*})^n$, et tels que les applications $(g_1, \dots, g_i) : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^i$, $i = 1, \dots, p$, définissent des intersections complètes à singularité isolée à l'origine. Supposons de plus que $-1$ soit la plus petite racine entière du polynôme de Bernstein de $g_1^s$ et de celui des sections $(1/g_1 \cdots g_i)g_{i+1}^s$, $i = 1, \dots, p-1$, de groupes de cohomologie locale algébrique associés à des sous-familles de $g$.*

*Soit $f \in \mathcal{O}$, un germe de fonction holomorphe nulle à l'origine, tel que l'application quasi-homogène $(\mathrm{in}_\alpha f, g) : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{p+1}$ définisse une intersection complète à singularité isolée à l'origine. Sans perte de généralité, nous supposerons que $f$ est d'ordre un. Notons alors $\varrho \in \mathbf{Q}^{+*}$, le degré de $g_1 \cdots g_p \in \mathbf{C}[x]$, et $\delta$ la section représentée par $1/g_1 \cdots g_p$ dans le module de cohomologie locale algébrique associé à $g$.*

*Alors, le polynôme de Bernstein de $\delta f^s$ est :*

$$(s+1) \prod_{\mathcal{Z}_q \subsetneq \mathcal{Z}'_q} (s - \varrho + |\alpha| + q) \ .$$

*Preuve.* D'après la proposition 3.1.2.4, le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$ est de dimension finie. Par suite, il est isomorphe à son gradué. Constatons que cette identification conserve l'action de $s$. Le résultat est alors une conséquence directe de la remarque précédente et du théorème 3.1.3.3, page 78.

Remarque 4.1.3.7 • Il résulte de la remarque 4.1.3.2 que sous les hypothèses du théorème précédent, les racines de $\tilde{b}(\delta f^s, s)$ sont contenues dans l'ensemble $[\varrho - |\alpha| - \sigma, \varrho - |\alpha|] \cap \mathbf{Q}$. Signalons aussi que nous établissons à la page 113 que le rationnel $\sigma$ est majoré par $n(\varrho + 1)$.

• Supposons que $f$ appartienne à l'idéal $\mathcal{J}$. Il résulte alors du théorème 4.1.3.6 et de la remarque 3.1.2.5 que :

$$b(\delta f^s, s) = (s+1) \prod_{q \in \Pi} (s - \varrho + |\alpha| + q) \ .$$

Cette formule généralise celle obtenue au corollaire 4.2.2.3 dans le cas particulier où $f$ est un polynôme quasi-homogène. En particulier, quand $f \in \mathcal{J}$, $b(\delta f^s, s) = b(\delta(\mathrm{in}(f))^s, s)$. On retrouve donc le résultat du lemme 1.1.1.6.

• Supposons que $f$ soit un polynôme quasi-homogène. Soit $F \in \mathcal{O}\{y\}$, une déformation de $f$ à un paramètre. Pour tout $\mathbf{y}$ voisin de zéro, notons $F_{\mathbf{y}} = F(\bullet, \mathbf{y}) \in \mathcal{O}$. Supposons de plus que, pour tout $\mathbf{y}$ voisin de zéro, $\mathrm{in}(F_{\mathbf{y}}) = f$. En particulier, $(F, g)$ est une déformation à nombre de Milnor constant (proposition 4.1.1.8). De plus, pour tout $\mathbf{y}$ voisin de 0, l'idéal initial de $\mathcal{J}_{F_{\mathbf{y}}}$ est constant, égal à $\mathrm{in}(\mathcal{J})$.

D'après le théorème 4.1.3.6 et la remarque 4.1.3.2, pour tout $\mathbf{y}$ voisin de 0, il existe alors un entier $\ell \in \mathbf{N}$ tel que $\tilde{b}(\delta f^s, s)$ divise $\tilde{b}(\delta F_{\mathbf{y}}^s, s) \cdots \tilde{b}(\delta F_{\mathbf{y}}^s, s+\ell)$. Cela généralise dans un cas particulier un résultat de [Ge2, th. 7.4, p. 158].

### 4.1.4 Le calcul effectif

D'après le théorème 4.1.3.6 et la remarque 4.1.3.3, il s'agit d'établir un procédé pour calculer explicitement les $\mathcal{Z}_q$. Commençons par donner une fonction d'ordre sur $\mathcal{D}_{x,t}\delta f^s$ adaptée à la division par $\mathcal{J}$, qui étend l'ordre 'naturel' sur $\mathcal{R}[1/f]$ associé à $\alpha$.

• Soit $U \in \bigoplus_{i\geq 0} DE\delta\xi_i - \{0\}$. Il s'écrit de façon unique $U = \sum_{i=0}^N U_i\delta\xi_i$ avec $U_i \in DE$. Définissons l'*ordre* de $U$ comme étant le rationnel :

$$\rho(U) = \min\{\rho(U_i) - i\} \ .$$

Cette définition étend l'ordre donné sur $\bigoplus_{i\geq 0} E\delta\xi_i$ au paragraphe précédent.

• Soit $V \in \mathcal{D}_{x,t}\delta f^s - \{0\}$. D'après le lemme 4.1.2.2, il existe $U \in \bigoplus_{i\geq 0} DE\delta\xi_i$ et $Q \in \mathcal{D}\mathcal{J}$ tels que $V = Q\delta f^s + U$. Lorsque $U \neq 0$, l'*ordre* de $V$ est alors défini en posant $\rho(V) = \rho(U)$.

De plus, si $V$ s'écrit $\sum_{i=0}^N P_i\delta\xi_i$, alors $\rho(V)$, $\rho(Q) \geq \min\{\rho(P_i) - i\}$. Cela résulte directement de la remarque 4.1.2.3.

Précisons maintenant l'action de $s$ sur $\bigoplus_{i\geq 0} DE\delta\xi_i$.

Lemme 4.1.4.1 *Soit $U = \sum_{i=0}^N U_i\delta\xi_i \in \bigoplus_{i\geq 0} DE\delta\xi_i$ avec $\rho(U)+N+\rho(h) > \sigma$. Alors :*

$$(s + \rho(U) - \chi - \varrho)U = Q\delta f^s + \widetilde{U}$$

*avec $Q \in \mathcal{D}\mathcal{J}$ et $\widetilde{U} = \sum_{i=0}^N \widetilde{U}_i\delta\xi_i \in \bigoplus_{i\geq 0} DE\delta\xi_i$, où $\rho(Q)$, $\rho(\widetilde{U}) > \rho(U)$, $\deg Q$, $\deg \widetilde{U}_0 \leq \max\{\deg U_j + j + 1 \mid j = 0, \ldots, N\}$, $\deg \widetilde{U}_i \leq \max\{\deg U_j + j - i + 1 \mid j = i-1, \ldots, N\}$ pour $i \geq 1$.*

*Preuve.* A partir de l'identité (3) du lemme 4.1.2.1, on établit la formule :

$$\begin{aligned}(s+w-\chi-\varrho)\partial^\beta u\delta\xi_i &= [(i+w+\alpha.\beta-\rho(u))\partial^\beta u-\partial^\beta(\chi(u)-\rho(u)u)]\delta\xi_i \\ &\quad + \partial^\beta hu\delta\xi_{i+1} \qquad (\dagger)\end{aligned}$$

où $u\in\mathcal{O}-\{0\}$, $i\in\mathbf{N}$ et $\beta\in\mathbf{N}^n$. En l'appliquant à tous les termes $\partial^\beta u\delta\xi_i$ apparaissant dans $U_i$, il vient :

$$(s+\rho(U)-\chi-\varrho)U=\sum_{i=0}^{N+1}P_i\delta\xi_i$$

où les $P_i$ sont des opérateurs vérifiant $\deg P_{N+1}\leq\deg U_N$, $\deg P_0\leq\deg U_0$, et $\deg P_i\leq\max\{\deg U_{i-1},\deg U_i\}$ pour $i=1,\ldots,N$.

De plus, d'après la remarque 4.1.2.3, pour tout $i=0,\ldots,N+1$, il existe des opérateurs $R_{i,j}\in DE$, $j=0,\ldots,i$, et $Q_i\in\mathcal{DJ}$ tels que :

$$P_i\delta\xi_i=Q_i\delta f^s+\sum_{j=0}^{i}R_{i,j}\delta\xi_j$$

avec $\deg R_{i,j}\leq\deg P_i+i-j$ et $\deg Q_i\leq\deg P_i+i$. Posons alors $Q=\sum_{j=0}^{N+1}Q_j$ et, pour $i=0,\ldots,N+1$, $\widetilde{U}_i=\sum_{j=i}^{N+1}R_{j,i}$. Les relations annoncées sur les degrés de ces opérateurs résultent des inégalités précédentes.

Constatons que $\widetilde{U}_{N+1}=0$. En effet, si $\partial^\beta u$ apparaît dans l'écriture de $U_N$, alors $\rho(\partial^\beta u\overline{\delta}\xi_N)\geq\rho(U)$, donc $\rho(hu)\geq\rho(h)+N+\alpha.\beta+\rho(U)>\sigma$ par hypothèses. Ainsi $\partial^\beta hu\delta\xi_{N+1}\in\mathcal{DJ}\delta\xi_{N+1}\subset\mathcal{D}\delta\xi_N$ (voir la relation (3) du lemme 3.1.1.3). D'où la nullité de $\widetilde{U}_{N+1}$.

Il reste à voir que $\widetilde{U}=\sum_{i=0}^{N}\widetilde{U}_i\delta\xi_i$ et $Q$ sont d'ordre strictement supérieur à $\rho(U)$. D'après la remarque précédent ce lemme, nous avons $\rho(\widetilde{U}),\rho(Q)\geq\min\{\rho(P_i)\ -i\}$. Montrons donc que $\rho(P_i)-i>\rho(U)$ pour tout $i$. Par définition de $\rho(U)$, $\rho(\partial^\beta u\delta\xi_i)=\rho(\partial^\beta u)-i$ est supérieur ou égal à $\rho(U)$ pour tout $\partial^\beta u\delta\xi_i$ apparaissant dans l'écriture de $U$. Il suffit donc de constater que, lorsque $\rho(\partial^\beta u\delta\xi_i)\geq\rho(U)$, les membres de droite de l'identité ($\dagger$) sont d'ordre strictement supérieur à $\rho(U)$.

Rappelons que $\aleph$ désigne le plus petit majorant entier de $\sigma$ (page 103).

Proposition 4.1.4.2 *Il existe un entier $L\in\mathbf{N}$, une suite $(S_\ell)_{0\leq\ell\leq L}$ de bons opérateurs $S_\ell$ de degré $\ell+1$, une suite strictement croissante de rationnels $(q_\ell)_{0\leq\ell\leq L}$, où $q_0=1$, et une suite $(H_\ell)_{0\leq\ell\leq L-1}$ d'éléments $H_\ell\in\bigoplus_{i\geq0}DE\delta\xi_i$ d'ordre $q_{\ell+1}$, vérifiant :*

- *$S_\ell\delta f^{s+1}=(s+1)H_\ell$ pour $0\leq\ell\leq L-1$, $S_L\delta f^{s+1}=0$.*

- $H_\ell = \sum_{i=0}^{\aleph-2} H_{\ell,i}\delta\xi_i$ *avec* $H_{\ell,i} \in DE$*, tel que* $\deg H_{\ell,i} \leq \ell - i$.

*Preuve.* Procédons par récurrence sur l'entier $\ell$. D'après le théorème 4.1.1.3, $h$ s'écrit :

$$h = w + \nu\chi(f) + \sum_{K \in \mathcal{K}} \lambda_K \Delta_K^g(f) + v$$

avec $w \in (g_1, \ldots, g_p)\mathcal{O}$, $\lambda_K$, $\nu \in \mathcal{O}$, $v \in E$, tels que les termes apparaissant dans le membre de droite sont d'ordre supérieur ou égal à $\rho(h)$. De plus, nous avons la relation :

$$(s + 1 - \chi - \varrho)\delta f^{s+1} = (s+1)h\delta f^s \ .$$

Posons alors $S_0 = s + 1 - (\nu + 1)(\chi + \varrho) - \sum_{K \in \mathcal{K}} \lambda_K \Delta_K^g$. Si $v = 0$, $L = 0$ convient. Sinon, posons $H_0 = v\delta f^s$. En particulier, $\rho(H_0) \geq \rho(h) > 1$.

Pour tout entier $\ell' \leq \ell$, supposons construits $q_{\ell'}$, $S_{\ell'}$, $H_{\ell'}$, satisfaisant aux conditions demandées, avec $H_\ell \neq 0$ et $\rho(H_\ell) > q_\ell$. Posons $q_{\ell+1} = \rho(H_\ell)$. Ayant $\rho(H_\ell) + \aleph - 2 + \rho(h) > \sigma$, d'après le lemme 4.1.4.1, il vient :

$$(s + q_{\ell+1} - \chi - \varrho)H_\ell = Q_{\ell+1}\delta f^s + H_{\ell+1}$$

avec $Q_{\ell+1} \in \mathcal{DJ}$, $H_{\ell+1} = \sum_{i=0}^{\aleph-2} H_{\ell+1,i}\delta\xi_i \in \bigoplus_{i\geq 0} DE\delta\xi_i$, $\deg Q_{\ell+1} \leq \ell+1$, $\deg H_{\ell+1,i} \leq \ell + 1 - i$, $\rho(Q_{\ell+1})$, $\rho(H_{\ell+1}) > q_{\ell+1}$.

Comme $Q_{\ell+1} \in \mathcal{DJ}$, d'après l'identité (3) du lemme 3.1.1.3, il existe $T_{\ell+1} \in \mathcal{D}$ tel que $(s+1)Q_{\ell+1}\delta f^s = T_{\ell+1}\delta f^{s+1}$, avec $\deg T_{\ell+1} \leq \deg Q_{\ell+1} + 1 \leq \ell + 2$. Ainsi :

$$(s + q_{\ell+1} - \chi - \varrho)S_\ell\delta f^{s+1} = (s+1)H_{\ell+1} + T_{\ell+1}\delta f^{s+1} \ .$$

Posons alors $S_{\ell+1} = (s + q_{\ell+1} - \chi - \varrho)S_\ell - T_{\ell+1}$. Il résulte de l'hypothèse de récurrence que c'est un bon opérateur en $s$ de degré $\ell + 2$. Si $H_{\ell+1} = 0$, on pose $L = \ell + 1$. Sinon, on recommence.

Remarquons enfin que le procédé termine. En effet, comme les rationnels $q_{\ell'}$ appartiennent à $\mathbf{N}\alpha_1 + \cdots + \mathbf{N}\alpha_n$, en un nombre fini d'étapes l'ordre $\sigma$ est dépassé.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer $\mathcal{Z}$.

Proposition 4.1.4.3 *Avec les notations de la proposition précédente :*

$$\mathcal{Z} = \left\{ \sum_{\ell=0}^{L-1} c(a_\ell H_\ell) \ \middle|\ a_\ell \in \mathcal{O} \right\} \ .$$

*Preuve.* Constatons que les $H_\ell$ appartiennent à $(d/dt)^{-1}\mathcal{D}[s]\delta f^s$. Il suffit donc d'établir que $\mathcal{Z}$ est contenu dans l'ensemble donné.

Soient $U \in \mathcal{D}[s]\delta f^s$ et $P(s) \in \mathcal{D}[s]$ tels que $(s+1)U = P(s)\delta f^{s+1}$. Les opérateurs $S_i$ étant unitaires en $s$ de degré $i+1$, $P$ s'écrit de façon unique :

$$P = P_L(s)S_L + P_{L-1}S_{L-1} + \cdots + P_0S_0 + R$$

avec $P_L(s) \in \mathcal{D}[s]$, $P_i \in \mathcal{D}$ pour $i \leq L-1$ et $R \in \mathcal{D}$. Nous avons alors l'identité :

$$(s+1)U = (s+1)\sum_{i=0}^{L-1} P_iH_i + R\delta f^{s+1}$$

dans $\mathcal{D}_{x,t}\delta f^s$. En procédant comme dans la preuve du lemme 3.1.1.3, on montre qu'il existe un opérateur $Q \in \mathcal{D}\mathcal{J}$ tel que $R\delta f^{s+1} = (s+1)Q\delta f^s$. L'identité précédente entraîne alors que $U - \sum_{i=0}^{L-1} P_iH_i \in \mathcal{D}\mathcal{J}\delta f^s$. D'où l'assertion.

- Précisons maintenant quels $a_\ell$ sont suffisants pour obtenir $\mathcal{Z}_q$, $q \in \mathbf{Q}^+$.

Lemme 4.1.4.4 *Pour tout $q \in \mathbf{Q}^+$, $\mathcal{Z}_q$ s'obtient en prenant les parties initiales des éléments d'ordre $q$ de l'espace* $\left\{\sum_{\ell=0}^{L-1} c(a_\ell H_\ell) \mid a_\ell \in \bigoplus_{q'=0}^{q-q_{\ell+1}} \mathcal{O}_{q'}\right\}$.

*Preuve.* Soient $i \in \mathbf{N}$, $a \in \mathcal{O}-\{0\}$ et $\partial^\beta u \in DE$. Constatons que $c(a\partial^\beta u\delta\xi_i) = (-1)^{|\beta|}c(\partial^\beta(a)u\delta\xi_i)$. De plus, il résulte du lemme 4.1.2.2 que $c(\partial^\beta(a)u\delta\xi_i)$ a un ordre supérieur ou égal à $\rho(a)-\alpha.\beta+\rho(u)-i = \rho(a)+\rho(\partial^\beta u\delta\xi_i)$. Aussi, si $\partial^\beta u$ est un terme qui apparaît dans l'expression de $H_{\ell,i}$, alors $\rho(c(a\partial^\beta u\delta\xi_i)) \geq \rho(a) + q_{\ell+1}$. Le résultat s'en déduit.

A l'aide du lemme précédent et de la remarque 4.1.3.3, on peut expliciter les racines de $\tilde{b}(\delta f^s, s)$.

Remarque 4.1.4.5 Ainsi, si $q < q_1$, alors $\mathcal{Z}_q = 0$. D'autre part, $\mathcal{Z}'_q$ est non nul si $q \in \Pi$. Par suite, $(s - \varrho + |\alpha| + q)$ divise $\tilde{b}(\delta f^s, s)$ dès que $q < q_1$ et $q \in \Pi$.

Exemple

Prenons $n = 2$, $p = 1$, $g(\underline{x}) = x_1^4 + x_2^3$ et $f(\underline{x}) = x_1 + \lambda x_2$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Alors l'application $(f,g)$ est semi-quasi-homogène pour le système $\alpha = (1, 4/3)$, et $g$ est un polynôme quasi-homogène à singularité isolée, de degré $\varrho = 4$.

Nous souhaitons calculer $b(\delta f^s, s)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$.

Comme $\mathcal{J} = (x_1 + (4/3)\lambda x_2, x_2^2)\mathcal{O}$, nous en déduisons que $\mathrm{in}(\mathcal{J}) = (x_1, x_2^2)\mathbf{C}[x]$ (voir page 102). Aussi, posons $E_0 = \mathbf{C}.1$ et $E_{4/3} = \mathbf{C}.x_2$. L'ensemble $\Pi$ est $\{0, 4/3\}$ et $\sigma = 4/3$. Enfin, $\chi = x_1(\partial/\partial x_1) + (4/3)x_2(\partial/\partial x_2)$ et $h = f - \chi(f) = -(\lambda/3)x_2$.

Si $\lambda = 0$, l'application $(f, g)$ est de plus quasi-homogène. D'après le corollaire 4.2.2.3, il vient :

$$b(\delta f^s, s) = (s+1)(s-5/3)(s-1/3)\ .$$

Supposons $\lambda \neq 0$. En suivant l'algorithme décrit dans la preuve de la proposition 4.1.4.2, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (s+1-\chi-4)\delta f^s &= (s+1)h\delta f^s \ = \ (s+1)H_0 \\ (s+\frac{4}{3}-\chi-4)x_2\delta f^s &= -(s+1)\frac{\lambda x_2^2}{3}\delta\xi_1 \end{aligned}$$

où $\rho(H_0) = 4/3$. Comme $\mathcal{O}_{\geq 5/3} \subset \mathcal{J}$, l'élément $x_2^2\delta\xi_1$ appartient à $\mathcal{D}\mathcal{J}\delta f^s$ d'après le lemme 4.1.2.2. Ainsi $H_1 = 0$ et $L = 1$. Nous en déduisons les égalités $\mathcal{Z} = c(\mathcal{O}H_0) = E_{4/3}\delta f^s = \mathcal{Z}_{4/3}$. En utilisant la remarque 4.1.3.3, on obtient que $\{0, 1/3\}$ est l'ensemble des rationnels $q$ pour lesquels $\mathcal{Z}_q \subsetneq \mathcal{Z}'_q$. D'où la formule :

$$b(\delta f^s, s) = (s+1)(s-4/3)(s-5/3) \text{ si } \lambda \neq 0.$$

Cet exemple illustre le second point de la remarque 4.1.3.7, puisque $b(\delta x_1^s, s)$ divise $b(\delta(x_1+\lambda x_2)^s, s)b(\delta(x_1+\lambda x_2)^s, s+1)$ pour tout $\lambda \neq 0$. De plus, c'est l'exemple initiateur des calculs du paragraphe 4.1.5.

• Montrons comment obtenir un opérateur réalisant le polynôme de Bernstein de $\delta f^s$ à partir de la formule du théorème 4.1.3.6.

Lemme 4.1.4.6 *Pour tout $q \in \mathbf{Q}^+$, il y a une inclusion :*

$$\underbrace{\prod_{0\leq q'<q,\ \mathcal{Z}_{q'}\subsetneq\mathcal{Z}'_{q'}} (s-\varrho+|\alpha|+q')}_{d_q(s)}\,\delta f^s \in \bigoplus_{i\geq 0} DE_{\geq q+i}\delta\xi_i + \mathcal{D}[s](f,\mathcal{J})\delta f^s \qquad (4)$$

Pour un certain $q \leq \sigma$, nous obtenons ainsi un opérateur $P \in \mathcal{D}[s](f,\mathcal{J})$ tel que $d_q(s)\delta f^s = P\delta f^s$. On conclut alors grâce aux relations (3) du lemme 3.1.1.3.

*Preuve.* D'après la remarque 4.1.3.2, nous pouvons procéder par récurrence sur $q \in (-\mathbf{N} + \Pi) \cap \mathbf{Q}^+$. Si $q = 0$, l'assertion est manifeste. Supposons maintenant qu'il existe une identité :

$$d_q(s)\delta f^s = \underbrace{\sum \partial^\beta U_\beta}_{U} \mod \mathcal{D}[s](f, \mathcal{J})\delta f^s \tag{5}$$

pour un $q \in \mathbf{Q}^+$, où $U_\beta \in \bigoplus_{i\geq 0} E_{\geq q+i}\delta\xi_i - \{0\}$. Notons $B_q \subset \mathbf{N}^n$, l'ensemble des multi-indices $\beta$ pour lesquels $\rho(U_\beta) = q$. Si $B_q$ est vide, on déduit aisément de (5) une relation pour le successeur de $q$.

Traitons maintenant le cas $B_q$ non vide. Remarquons d'abord que pour tout $\beta \in B_q$, $\mathrm{in}(U_\beta) \in \mathcal{Z}'_q$. En effet, la relation $(-1)^{|\beta|}(x^\beta/\beta!)U = U_\beta + R$ où $R \in \bigoplus_{i\geq 0} DE_{>q+i}\delta\xi_i + \mathcal{D}\mathcal{J}\delta f^s$, entraîne que $\mathrm{in}(U_\beta) = \mathrm{in}((-1)^{|\beta|}(x^\beta/\beta!)U)$. Or $U \in \mathcal{D}[s]\delta f^s$ d'après la relation (5) ; d'où l'assertion.

Par suite, grâce à la remarque 4.1.3.5 (et éventuellement le lemme 4.1.2.1) l'identité (5) implique :

$$d_{q_1}(s)\delta f^s \in \bigoplus_{i\geq 0} DE_{>q+i}\delta\xi_i + \sum_{\beta\in B_q} \partial^\beta V_\beta + \mathcal{D}[s](f, \mathcal{J})\delta f^s$$

où $q_1$ est le successeur de $q$, et $V_\beta \in \mathcal{Z}_q$. Nous en déduisons le résultat espéré, l'inclusion (4) au rang $q_1$ étant une conséquence directe du lemme qui suit.

Lemme 4.1.4.7 *Pour tout $q \in \mathbf{Q}^+$, $\mathcal{Z}_q \subset \bigoplus_{i\geq 0} DE_{>q+i}\delta f^s + \mathcal{D}[s](f, \mathcal{J})\delta f^s$.*

*Preuve.* Soit $U$ un élément non nul de $\mathcal{Z}_q$. Par définition, il existe $U' \in \mathcal{D}[s](f, \mathcal{J})\delta f^s$ tel que $U = \mathrm{in}(c(U'))$. Ecrivons $U' = \sum \partial^\beta U'_\beta \mod \mathcal{D}\mathcal{J}\delta f^s$ où $U'_\beta \in \bigoplus_{i\geq 0} E\delta\xi_i - \{0\}$.

Notons $q(U') = \min_\beta \rho(U'_\beta) \leq q$. Soit $\tilde\beta \in \mathbf{N}^n$, un multi-indice de longueur maximale pour lequel ce minimum est réalisé. Si $\tilde\beta$ est nul alors $U' - U \in \bigoplus_{i\geq 0} DE_{>q+i}\delta f^s + \mathcal{D}\mathcal{J}\delta f^s$, d'où l'assertion.

Supposons que $|\tilde\beta| > 0$. Nous avons la relation $(-1)^{|\tilde\beta|}(x^{\tilde\beta}/\tilde\beta!)U' = U'_{\tilde\beta} + R$ où $R \in \bigoplus_{i\geq 0} DE_{>q(U')+i}\delta\xi_i + \mathcal{D}\mathcal{J}\delta f^s$. Posons alors :

$$U'' = U' - \partial^{\tilde\beta}((-1)^{|\tilde\beta|}(x^{\tilde\beta}/\tilde\beta!)U') = [U' - \partial^{\tilde\beta}U_{\tilde\beta}] - \partial^{\tilde\beta}R$$

Remarquons que $c(U'') = c(U')$, $q(U'') \geq q(U')$ et que $U'' \in \mathcal{D}(f, \mathcal{J})\delta f^s$. De plus, le multi-indice $\tilde\beta$ n'apparaît plus dans le calcul de $q(U'')$.

En itérant ce procédé, soit on peut conclure grâce à la nullité de $\tilde\beta$, soit on obtient $\widetilde{U} \in \mathcal{D}(f, \mathcal{J})\delta f^s$ tel que $c(\widetilde{U}) = c(U')$ et $q(\widetilde{U}) > q(U)$. Ces rationnels appartenant à $(-\mathbf{N}+\Pi)\cap\mathbf{Q}^+$, une induction permet donc de se ramener au cas $q(\widetilde{U})=q$. En éliminant comme précédemment les multi-indices $\tilde\beta$ de longueur non nulle, on parvient enfin à conclure.

• Donnons une majoration de $\aleph=\min\{N\in\mathbf{N}\,|\,\mathcal{O}_{\geq N}\cap\mathbf{C}[x]\subset \mathrm{in}(\mathcal{J})\}$. Reformulons le problème. Etant donné un idéal de colongueur finie $I\subset\mathbf{C}[x]$ engendré par des polynômes $G_1,\dots,G_m$, $m>n$, quasi-homogènes pour un système de poids $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in(\mathbf{Q}^{+*})^n$, de degré $\varrho_1\leq\cdots\leq\varrho_m$, nous souhaitons obtenir une majoration du plus petit entier $N(I)$ tel que $I$ contienne tout polynôme quasi-homogène de degré supérieur ou égal à $N(I)$.

Lorsque les polynômes $G_1,\dots,G_m$ sont homogènes, J. Briançon donne une réponse dans [Br2]. Il définit le *multi-degré caractéristique* de l'idéal $I$, suite croissante d'entiers $\delta(I)=(\delta_1,\dots,\delta_n)$, et montre que $N(I)<\delta_1+\cdots+\delta_n-n+1$. De plus, $\delta(I)$ est une sous-suite de la suite des degrés des polynômes $G_i$. Ainsi, si $\beta=(1,\dots,1)$ :

$$N(I)<\varrho_{i_1}+\cdots+\varrho_{i_n}-n+1\ .$$

pour une suite $1\leq i_1<\cdots<i_n\leq m$.

Traitons maintenant le cas général. Pour tout $i=1,\dots,m$, considérons $\widetilde{G}_i(X)=G_i(X_1^{b_1},\dots,X_n^{b_n})$, où $\beta_j=b_j/r\in(1/r)\mathbf{N}^*$, $j=1,\dots,n$, polynôme homogène de degré $r\varrho_i$. Soit $(\delta_1=r\varrho_{i_1},\dots,\delta_n=r\varrho_{i_n})$, le multi-degré caractéristique de l'idéal $\tilde I=(\widetilde{G}_1,\dots,\widetilde{G}_m)\mathbf{C}[X]$. D'après le cas précédent, $\bigoplus_{k\geq\kappa}\mathbf{C}[X]_k\subset\tilde I$, où $\mathbf{C}[X]_k$ désigne le sous $\mathbf{C}$-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré $k$, et $\kappa=r\varrho_{i_1}+\cdots+r\varrho_{i_n}-n+1$. On en déduit alors aisément que :

$$N(I)\leq\varrho_{i_1}+\cdots+\varrho_{i_n}-\frac{n-1}{r}\ .$$

Nous avons donc la majoration : $\aleph\leq\lceil n(\varrho+1)\rceil$.

### 4.1.5 Application : polynômes de Bernstein génériques

Dans ce paragraphe, nous donnons un cas dans lequel le polynôme de Bernstein générique associé à $\delta$ d'une déformation $F$ coïncide avec celui de la fibre générique (voir la remarque 3.2.2.10). Puis nous adaptons à notre situation les calculs de polynômes de Bernstein génériques de déformations semi-quasi-homogènes en dimension deux menés dans [B.G.M.M, p. 599-603].

**Le cas général**

Rappelons que $g$ est une application polynomiale non constante, nulle à l'origine, quasi-homogène pour le système de poids $\alpha$, définissant une intersection complète à singularité isolée en 0, et telle que $\delta \in \mathcal{R}$ satisfait à la condition **(i)** du paragraphe 3.1.1 (voir page 101).

Soit $f \in \mathbf{C}[x]$, un polynôme non constant, quasi-homogène pour le système $\alpha$, tel que l'application $(f, g)$ définit une intersection complète à singularité isolée. Sans perte de généralité, nous supposerons encore que $\rho(f) = 1$.

Soit $\mathcal{E} \subset \mathbf{C}[x]$, un ensemble fini de monômes d'ordre strictement supérieur à un. Considérons enfin la déformation :

$$F = f + \sum_{e \in \mathcal{E}} t_e e \ \in \ \mathbf{C}[t, x] \ .$$

Ainsi, $(F, g)$ est une déformation semi-quasi-homogène de $(f, g)$.

L'application $(F, g)$ étant polynomiale, $\delta F^s$ admet un polynôme de Bernstein générique (proposition 2.1.2.4), générateur unitaire de l'idéal des polynômes $c(s) \in \mathbf{C}[s]$ vérifiant :

$$c(s)\delta F^s \in \mathcal{D}\{\{t\}\}[s].\delta F^{s+1}$$

On le note $b_g(\delta F^s, s)$. Retrouvons ce résultat lorsque $p = n - 1$, en adaptant la méthode développée aux chapitres 3 et 4.

En effet, comme le fait F. Geandier dans [Ge2], on peut faire une version 'relative' de la construction du chapitre 3, où les $\mathcal{D}\{t\}$-modules à support l'espace des paramètres tiennent le rôle des $\mathcal{D}$-modules supportés par l'origine. Les analogues des conditions **(i)-(iii)** sont satisfaites pour $\delta \in \mathcal{R} \otimes \mathbf{C}\{\{t\}\}$, puisque $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}\{t\}}\, \delta F^s = \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{D}\{t\} g_i$. Cela s'obtient par exemple à partir du fait que, pour toute famille $\mathbf{t} = (\mathbf{t}_e)_{e \in \mathcal{E}}$ de complexes voisins de zéro, $\mathrm{car}_{\mathcal{D}}\, \mathcal{D}\delta F_{\mathbf{t}}^s = X \times (\mathbf{C}^n)^*$, où $F_{\mathbf{t}} \in \mathbf{C}[x]$ désigne la spécialisation de $F$ en $\mathbf{t}$ (voir page 82). On réalise alors $\tilde{b}_g(\delta F^s, s)$ comme polynôme minimal de l'action de $s$ sur $H^n_{DR_r}((s+1)(\mathcal{D}\{\{t\}\}[s]\delta F^s / \mathcal{D}\{\{t\}\}[s]\delta F^{s+1})) \cong \widetilde{\mathcal{Z}}' / \widetilde{\mathcal{Z}}$ (voir [Ge2, prop. 7.2]).

Dans les calculs du début du chapitre 4, cela revient à remplacer $\mathbf{C}$ par $\mathbf{C}\{t\}$ partout : suivant le paragraphe 4.1.4, on construit alors une suite $(\widetilde{H}_\ell, \widetilde{S}_\ell)$, des $\mathbf{C}\{\{t\}\}$-espaces vectoriels $\widetilde{\mathcal{Z}}$, $\widetilde{\mathcal{Z}}'$, $\widetilde{\mathcal{Z}}_q$, et en utilisant les analogues du théorème 4.1.3.6 et du lemme 4.1.4.6, une équation fonctionnelle :

$$b_g(s)\delta F^s = P\delta F^{s+1}$$

où $P \in \mathcal{D}\{\{t\}\}[s]$ et $b_g(s) = (s+1)\prod_{\widetilde{\mathcal{Z}}_q \subsetneq \widetilde{\mathcal{Z}}'_q}(s - \varrho + |\alpha| + q)$.

PROPOSITION 4.1.5.1 *Il existe un ouvert de Zariski $\Theta$ de l'espace des paramètres tel que, si $\mathbf{t} \in \Theta$, $b_g(s)$ est le polynôme de Bernstein de $F_{\mathbf{t}} = F(\bullet, \mathbf{t})$.*

*Preuve.* Lorsque on spécialise $t = \mathbf{t}$ au voisinage de 0, pour $\mathbf{t}$ appartenant à un ouvert de Zariski, les $H_\ell(\mathbf{t})$ sont des spécialisations des $\widetilde{H}_\ell$. On montre alors facilement que les dimensions de $\mathcal{Z}(\mathbf{t})$, $\mathcal{Z}_q(\mathbf{t})$ sont génériquement égales aux dimensions sur $\mathbf{C}\{\{t\}\}$ de $\widetilde{\mathcal{Z}}$, $\widetilde{\mathcal{Z}}_q$. Le résultat s'en déduit.

Ce résultat généralise [B.Ge.M, th. 3.4, p. 31] dans un cas particulier.

## Un cas particulier en dimension deux

Nous supposerons maintenant que $n = 2$, $p = 1$, et que $f(\underline{x}) = x_1^a$ pour un entier $a \in \mathbf{N}^*$. Ainsi, $g \in \mathbf{C}[x_1, x_2]$ est un polynôme à singularité isolée, quasi-homogène de degré $\varrho$ pour le système de poids $\alpha = (\alpha_1 = 1/a, \alpha_2) \in (\mathbf{Q}^{*+})^2$, de la forme $x_2^b + x_1\tilde{g}(\underline{x})$, avec $b \in \mathbf{N}^*$ et $\tilde{g} \in \mathbf{C}[x]$.

Remarquons que $\delta$ satisfait à la condition **(i)** du paragraphe 3.1.1. Cela résulte du théorème 3.2.2.3, et du fait que les racines du polynôme de Bernstein d'un germe de fonction analytique de deux variables sont strictement supérieures à $-2$ ([V]).

En particulier, l'idéal $\mathrm{in}(\mathcal{J}) = (x_1^a, x_1^{a-1}g'_{x_2}, g)\mathbf{C}[x]$ a pour colongueur $ab-1$, et le socle de $\mathbf{C}[x]/\mathrm{in}(\mathcal{J})$ est de degré $\sigma$ avec :

$$\sigma < 1 + \varrho - |\alpha| \tag{6}$$

Pour $i \in \{1, 2\}$, posons $\alpha_i = p_i/r$, où $p_i, r \in \mathbf{N}^*$ et $\mathrm{pgcd}(p_1, p_2) = 1$. En particulier, $p_1 a = r$ et $p_2 b = r\varrho$.

Soit $E \subset \mathbf{C}[x]$, le supplémentaire de $\mathrm{in}(\mathcal{J})$ engendré par les monômes $x^\beta = x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}$ tels que $(\beta_1, \beta_2) \in [0, a-1] \times [0, b-1] - \{(a-1, b-1)\}$. Notons $\mathcal{E}$ une base monomiale de $E$ constituée de ces vecteurs. Pour tout $q \in \mathbf{Q}$, notons $\mathcal{E}_q = \{e_q^1, \ldots, e_q^{d(q)}\} \subset \mathcal{E}$, la base monomiale de $E_q$ ordonnée par ordre croissant du degré en $x_1$. En particulier, si pour tout $i = 1, \ldots, q$, on pose $e_q^i = x^{\beta_q^i}$, alors $\beta_q^{k+1} = \beta_q^1 + k(p_2, -p_1) \in \mathbf{N}^2$ pour $k = 0, \ldots, d(q) - 1$. Ainsi, étant donnés $e_q^{i+1}, e_{q'}^{j+1} \in \mathcal{E}$, nous avons l'identité $e_q^{i+1}e_{q'}^j = e_q^i e_{q'}^{j+1}$.

Constatons que pour tout $q \in \mathbf{Q}$, $0 \leq q \leq \min(1 - \alpha_1, \varrho - \alpha_2)$, les sous-espaces vectoriels $\mathcal{O}_q$, $E_q \subset \mathbf{C}[x]$ coïncident.

Soit $\sigma_1 \in \Pi$ tel que $1 < \sigma_1$ et $\varrho - \alpha_2 \leq \sigma_1$. En particulier, d'après (6), $\sigma < 2\sigma_1$. Soit alors $\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_N = \sigma$, la suite croissante des éléments de $\Pi \cap [\sigma_1, \sigma]$. Notons $\mathcal{E}' = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{E}_{\sigma_i}$. Considérons alors la déformation de $f$ :

$$F = f + \sum_{e \in \mathcal{E}'} t_e e \ \in \ \mathbf{C}[t, x]$$

dont on souhaite calculer le polynôme de Bernstein générique associé à $\delta$.

Cela va nécessiter trois lemmes techniques.

NOTATIONS

Posons $h = F - \chi(F) = \sum_{e \in \mathcal{E}'} (1 - \rho(e)) t_e e$, $\mathcal{T} \subset \mathbf{C}\{x_1, x_2, t\}$, le carré de l'idéal engendré par la famille $(t_e)_{e \in \mathcal{E}'}$, $\widetilde{\mathcal{J}} = (g, \chi(F), \Delta^g(F))\mathbf{C}\{x_1, x_2, t\}$, et

$$\widetilde{\mathcal{D}} = \mathbf{C}\{t\}\mathcal{D} \ , \ \widetilde{E} = \mathbf{C}\{t\}E \ , \ \delta\Xi_i = s(s-1)\cdots(s-i+1)\delta F^{s-i}$$

pour $i \in \mathbf{N}$. Enfin, $\widetilde{\mathcal{Z}}$, $\widetilde{\mathcal{Z}}' \subset \mathbf{C}\{\{t\}\} \bigoplus_{i \geq 0} \widetilde{E}\delta\Xi_i$ désignent les $\mathbf{C}\{\{t\}\}$-espaces vectoriels de dimension finie engendrés par les images par l'application $c$ de $\widetilde{\mathcal{D}}[s]\delta F^s$ et $\widetilde{\mathcal{D}}[s](F, \widetilde{\mathcal{J}})\delta F^s$ respectivement. On définit alors des espaces $\widetilde{\mathcal{Z}}_q$, $\widetilde{\mathcal{Z}}'_q$ pour tout $q \in \mathbf{Q}$ (voir page 105).

Considérons l'entier $L$, la suite des $\widetilde{H}_\ell \in \bigoplus_{i \geq 0} D\widetilde{E}\delta\Xi_i$, et les bons opérateurs $\widetilde{S}_\ell \in \widetilde{\mathcal{D}}$ que l'on construit en reprenant la proposition 4.1.4.2.

LEMME 4.1.5.2 *Pour tout $\ell = 0, \ldots, L-1$, l'élément $\widetilde{H}_\ell$ appartient à $D\widetilde{E}\delta F^s$. De plus, $\widetilde{H}_\ell = \widetilde{H}_{\ell,0}\delta F^s$ et $c(\widetilde{H}_\ell) = \widetilde{h}_\ell \delta F^s$ sont de même ordre, égal à $\sigma_{\ell+1}$ (en particulier, $N = L$). Plus précisément, pour tout $\ell = 0, \ldots, L-1$, $\widetilde{H}_{\ell,0}$ et $\widetilde{h}_\ell$ sont égaux modulo $\mathcal{D}\mathcal{T}$, et :*

$$\widetilde{h}_\ell = \sum_{e \in \mathcal{E}'} (\sigma_\ell - \rho(e)) \cdots (\sigma_1 - \rho(e))(1 - \rho(e)) t_e e \bmod \mathcal{T} \ ,$$

$$\mathrm{in}(\widetilde{h}_\ell \delta F^s) = c(\mathrm{in}(\widetilde{H}_\ell)) \in \widetilde{\mathcal{Z}}_{\sigma_{\ell+1}} \ .$$

*Preuve.* Reprenons l'algorithme décrit à la proposition 4.1.4.2. Pour $\ell = 0$, puisque $h \in \widetilde{E}$, il vient $\widetilde{H}_0 = h\delta F^s$, donc $\widetilde{h}_0 = \widetilde{H}_{0,0} = h$, qui est bien d'ordre $\sigma_1$.

Supposons les assertions vérifiées pour $\ell \leq L-2$. L'algorithme s'écrit :

$$(s + \sigma_{\ell+1} - \chi - \varrho)\widetilde{H}_\ell = \widetilde{H}_{\ell+1} \bmod \widetilde{\mathcal{D}}\widetilde{\mathcal{J}}\delta F^s \ .$$

Remarquons que $\rho(h\widetilde{h}_\ell) \geq 2\sigma_1 > \sigma$ et que $h\widetilde{h}_\ell \in \mathcal{T}$. D'après le théorème 4.1.1.3, $h\widetilde{h}_\ell$ s'écrit $h\widetilde{h}_\ell = v + \nu\chi(F) + \lambda\Delta^g(F)$ avec $v \in (g_1, \ldots, g_p)\mathcal{T}$, $\nu, \lambda \in \mathcal{T}$, tels que les termes apparaissant dans les membres de droite sont d'ordre supérieur ou égal à $\rho(h\widetilde{h}_\ell)$. Alors, en utilisant l'équation (†) du lemme 4.1.4.1 et les identités de la fin de la preuve du lemme 4.1.2.2, il vient :

$$c(\widetilde{H}_{\ell+1}) = \sigma_{\ell+1}\widetilde{h}_\ell \delta F^s - \chi(\widetilde{h}_\ell)\delta F^s + c((-|\alpha| + \varrho)\nu - \chi(\nu) - \Delta^g(\lambda))$$

où le troisième terme est dans $\mathcal{T}$ et d'ordre supérieur ou égal à $\sigma_{\ell+2}$. Grâce aux identités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{\ell+1}e - \chi(e) & = & (\sigma_{\ell+1} - \rho(e))e \\ \widetilde{H}_{\ell+1} - \widetilde{h}_{\ell+1}\delta F^s & = & (s + \sigma_{\ell+1} - \chi - \varrho)(\widetilde{H}_\ell - \widetilde{h}_\ell \delta F^s) \\ & & + \ (\Delta^g\lambda \ + \overline{\chi}\nu)\delta F^s \quad \mathrm{mod}\ \widetilde{\mathcal{D}}\mathcal{T}\widetilde{\mathcal{J}}\delta F^s \end{array}$$

nous déduisons donc de l'hypothèse de récurrence que $\widetilde{H}_{\ell+1}$ satisfait aux propriétés souhaitées. D'où le lemme.

Remarque 4.1.5.3 Il résulte de ce lemme et de la proposition 4.1.4.3 que, pour tout $q \in \mathbf{Q}$, $\widetilde{\mathcal{Z}}_q$ est contenu dans $\mathbf{C}\{\{t\}\}\widetilde{E}_q\delta F^s$, et n'est pas réduit à zéro si et seulement si $q \in \{\sigma_1, \ldots, \sigma_N\}$.

Il y a un cas particulier où l'on sait conclure grâce à ce lemme.

Proposition 4.1.5.4 *Supposons que $d(\sigma_i) = 1$ pour $i = 1, \ldots, N$. Alors le polynôme de Bernstein générique de $\delta F^s$ est :*

$$(s+1)\left(\prod_{q\in\Pi,\ q<\sigma_1}(s - \varrho + |\alpha| + q)\prod_{i=1}^{N}(s - \varrho + |\alpha| + \sigma_i - 1)\right)_{\mathrm{red}}$$

*Preuve.* Sous nos hypothèses, d'après la remarque précédente, $\widetilde{\mathcal{Z}}_q$ est égal à $\mathbf{C}\{\{t\}\}\widetilde{E}_q\delta F^s$ si et seulement si $q \in \{\sigma_1, \ldots, \sigma_N\}$, et est nul sinon. Le résultat est alors une conséquence directe du théorème 4.1.3.6 et de la remarque 4.1.3.3.

Remarque 4.1.5.5 • L'hypothèse est satisfaite si $p_1 \geq b$, ou si $p_2 \geq a$.

• Dans la preuve du lemme 4.1.5.2, on utilise seulement que $1 < \sigma_1$ et que $\sigma < 2\sigma_1$. La proposition précédente reste donc valable sous ces seules hypothèses sur $\sigma_1$. C'est pour traiter le cas général que l'on suppose de plus que $\varrho - \alpha_2 \leq \sigma_1$.

NOTATION

Soit $U \in \bigoplus_{i\geq 0} \widetilde{E}\delta\Xi_i$ non nul. Pour tout rationnel $q \in \mathbf{Q}$ tel que $q \leq \rho(U)$, posons $\mathrm{in}_q(U) = \mathrm{in}(U)$ si $\rho(U) = q$, et $\mathrm{in}_q(U) = 0$ sinon.

LEMME 4.1.5.6 *Pour tout $j = 1, \dots, N$, l'application linéaire $\varphi_j$ de $\bigoplus_{i=1}^{j} \widetilde{E}_{\sigma_j - \sigma_i}$ dans $\widetilde{E}_{\sigma_j}$, définie par :*

$$\mathrm{in}_{\sigma_j}(c(\sum_{i=1}^{j} u_i \widetilde{H}_{i-1})) = \varphi_j(u_1, \dots, u_j)\delta F^s$$

*détermine une application $\mathbf{C}\{\{t\}\}$-linéaire de rang maximum, notée $\tilde{\varphi}_j$.*

*Preuve.* Soit $w = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \in \mathcal{E}_{\sigma_j}$. En utilisant des propriétés de la base $\mathcal{E}$, nous obtenons les inégalités suivantes :

$$\alpha_1\beta_1 \geq \sigma_j - (b-1)p_2/r = \sigma_j - \varrho + \alpha_2 \geq \sigma_j - \sigma_1$$
$$\alpha_2\beta_2 \geq \sigma_j - (a-1)p_1/r = \sigma_j - 1 + \alpha_1 > \sigma_j - \sigma_1$$

Par suite, pour tout $u \in \mathcal{E}_{\sigma_j - \sigma_i}$, $w/u$ est un élément de $\mathcal{E}_{\sigma_i}$, $i = 1, \dots, j$.

Pour $i = 1, \dots, j$ tel que $\sigma_j - \sigma_j \in \Pi$, considérons la matrice $A^i = (a^i_{k,l})$ à coefficients dans $\mathbf{C}\{t\}$ de l'application linéaire $\varphi_j|_{\widetilde{E}_{\sigma_j-\sigma_i}}$ dans les bases $\mathcal{E}_{\sigma_j - \sigma_i}$ et $\mathcal{E}_{\sigma_j}$. Il résulte du lemme 4.1.5.2 que modulo $\mathcal{T}$, les coefficients $(a^i_{k,l})$, $1 \leq k \leq d(\sigma_j)$, $1 \leq l \leq d(\sigma_j - \sigma_i)$, peuvent être représentés par des polynômes homogènes de degré un de la forme :

$$(\sigma_{i-1} - \sigma_i) \cdots (\sigma_1 - \sigma_i)(1 - \sigma_i)t_e + \sum_{v \in \mathcal{E}_i,\, v e^k_{\sigma_j - \sigma_i} \notin \mathcal{E}_j} a_v t_v$$

où $e = e^k_{\sigma_j}/e^l_{\sigma_j - \sigma_i} \in \mathcal{E}_i$, $a_v \in \mathbf{C}$. De plus, avec nos choix de bases, nous avons $e^{k+1}_{\sigma_j}/e^{l+1}_{\sigma_j - \sigma_i} = e^k_{\sigma_j}/e^l_{\sigma_j - \sigma_i}$, dès que $k \leq d(\sigma_j) - 1$ et $l \leq d(\sigma_j - \sigma_i) - 1$. Nous en déduisons alors que l'application $\varphi_j$ est de rang maximum. D'où l'assertion.

NOTATION

Pour tout $q \in \mathbf{Q}$, posons :

$$\delta(q) = \begin{cases} d(q) - \sum_{i=1}^{j} d(q - \sigma_i) & \text{si } q = \sigma_j \ , \\ d(q) & \text{sinon} \ . \end{cases}$$

LEMME 4.1.5.7 (i) *Soient $q$, $q' \in \rho(\mathcal{O})$ tels que $1 < q < q'$. Alors $d(q) \geq d(q') - 1$.*

(ii) *Soit $j \in \{1, \dots, N\}$. Si $\delta(\sigma_j) > 0$, alors, pour tout $i = 1, \dots, j$, $\sigma_i = \sigma_1 + (i-1)/r$ et $\delta(\sigma_i) \geq 0$.*

*Preuve.* Pour tout $\rho \in ]1,\sigma] \cap \rho(\mathcal{O})$, notons $\mathcal{I}_\rho \subset \mathbf{R}^2$, le segment obtenu en prenant l'intersection du pavé $[0,a-1]\times[0,b-1]$ avec la droite $\mathcal{L}_\rho$ d'équation $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2 = \rho$. Soient $l(\rho) \in \mathbf{R}^+$, la longueur de $\mathcal{I}_\rho$, et $\theta$ la distance minimale entre deux points distincts d'une droite $\mathcal{L}_\rho$, à coordonnées dans $\mathbf{Z}^2$. Notons enfin $(u(\rho),\varepsilon(\rho)) \in \mathbf{N}\times[0,\theta[$, l'unique couple tel que $l(\rho) = \theta u(\rho)+\varepsilon(\rho)$. Remarquons que $u(\rho) \leq d(\rho) \leq u(\rho)+1$. Ainsi, comme $l(q) \geq l(q')$, il vient $u(q) \geq u(q')$, puis $-1 \leq u(q)-u(q')-1 \leq d(q)-d(q')$. Ce qui établit (i).

Soit maintenant $j \in \{1,\ldots,N\}$ tel que $\delta(\sigma_j) > 0$. Comme $\delta(\sigma_j) \leq d(\sigma_j)-d(0) = d(\sigma_j)-1$, nous en déduisons que $d(\sigma_j) \geq 2$. D'après (i), $d(q) \geq 1$ pour tout $q \in ]1,\sigma_j] \cap \rho(\mathcal{O})$. De plus, comme $\mathrm{pgcd}(p_1,p_2) = 1$, pour tout $q \in (1/r)\mathbf{N}$, la droite $\mathcal{L}_q$ contient des points à coordonnées dans $\mathbf{Z}^2$. En conséquence, $\{\sigma_1,\ldots,\sigma_j\} = [\sigma_1,\sigma_j] \cap (1/r)\mathbf{N}$ i.e. $\sigma_i = \sigma_1+(i-1)/r$ pour $i = 1,\ldots,j$. Pour de tels indices, nous avons alors :

$$\delta(\sigma_i) = d(\sigma_i) - \sum_{k=0}^{i-1} d(k/r) \geq d(\sigma_j) - 1 - \sum_{k=0}^{i-1} d(k/r) \geq \delta(\sigma_j) - 1 \geq 0$$

en utilisant une nouvelle fois (i). Ce qui achève la preuve.

Nous sommes maintenant en mesure d'expliciter $b_g(\delta F^s, s)$.

PROPOSITION 4.1.5.8 *Soit $a \in \mathbf{N}^*$. Soit $g \in \mathbf{C}[x_1,x_2]$, un polynôme quasi-homogène à singularité isolée pour un système de poids $\alpha = (\alpha_1 = 1/a, \alpha_2) \in (\mathbf{Q}^{*+})^2$, de la forme $x_2^b + x_1\tilde{g}(\underline{x})$, avec $b \in \mathbf{N}^*$ et $\tilde{g} \in \mathbf{C}[x]$. Notons $\varrho \in \mathbf{Q}$ son degré.*

*Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des monômes $x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}$ tels que $(\beta_1,\beta_2) \in [0,a-1]\times[0,b-1]-\{(a-1,b-1)\}$. Pour tout $q \in \mathbf{Q}$, notons $d(q) \in \mathbf{N}$ le nombre d'éléments de $\mathcal{E}$ de degré $q$ pour le système $\alpha$. Notons $\sigma = \max_{e\in\mathcal{E}} \rho(e)$ et $\Pi \subset \mathbf{Q}^+$, l'ensemble des degrés des éléments de $\mathcal{E}$.*

*Soit $\sigma_1 \in \Pi$ tel que $1 < \sigma_1$ et $\varrho - \alpha_2 \leq \sigma_1$. Soit alors $\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_N = \sigma$, la suite croissante des éléments de $\Pi \cap [\sigma_1,\sigma]$.*

*Si $F = f + \sum_{e\in\mathcal{E},\rho(e)\geq\sigma_1} t_e e$, alors le polynôme de Bernstein générique de $\delta F^s$ est :*

$$(s+1)\left(\prod_{\delta(q)>0}(s-\varrho+|\alpha|+q)\prod_{i=1}^{N}(s-\varrho+|\alpha|+\sigma_i-1)\right)_{\mathrm{red}}$$

*où $\delta(q) = d(q) - \sum_{i=1}^{j} d(q-\sigma_i)$ si $q = \sigma_j$ pour un $j$, et $d(q)$ sinon.*

*Preuve.* D'après le théorème 4.1.3.6, il suffit de déterminer l'ensemble $\mathcal{Q} \subset \mathbf{Q}^+$ des indices $q$ pour lesquels $\mathrm{gr}_q \widetilde{\mathcal{Z}}'/\widetilde{\mathcal{Z}}$ est non nul.

Soit $q \in \mathbf{Q}^+$. Tout d'abord, il résulte des remarques 4.1.3.3 et 4.1.5.3 que $\mathbf{C}\{\{t\}\}\widetilde{E}_q \delta F^s \subsetneq \widetilde{\mathcal{Z}}'_q$ si et seulement si $q+1 \in \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$. En particulier, $\sigma_i - 1 \in \mathcal{Q}$ pour $i = 1, \dots, N$, puisque $\widetilde{\mathcal{Z}} \subset \mathbf{C}\{\{t\}\}\widetilde{E}\delta F^s$ d'après le lemme 4.1.5.2.

Supposons maintenant que $\widetilde{\mathcal{Z}}'_q = \mathbf{C}\{\{t\}\}\widetilde{E}_q \delta F^s$. Alors, $\widetilde{\mathcal{Z}}_q \subsetneq \widetilde{\mathcal{Z}}'_q$ si et seulement si $q \in \Pi$ et $\widetilde{\mathcal{Z}}_q \subsetneq \mathbf{C}\{\{t\}\}\widetilde{E}_q \delta F^s$. Soit donc $q \in \Pi$. Considérons deux cas :

- soit $q < \sigma_1$. D'après la remarque 4.1.5.3, $\widetilde{\mathcal{Z}}_q$ est nul. Ainsi, $q \in \mathcal{Q}$.
- soit $q \in \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$. Alors, si $\delta(q) \leq 0$, il résulte du lemme 4.1.5.6 que $\widetilde{\mathcal{Z}}_q = \mathbf{C}\{\{t\}\}\widetilde{E}_q \delta F^s$. Donc $q \notin \mathcal{Q}$. Montrons enfin que $\widetilde{\mathcal{Z}}_q \subsetneq \mathbf{C}\{\{t\}\}\widetilde{E}_q \delta F^s$ lorsque $\delta(q) > 0$.

Soit $j$, l'indice tel que $q = \sigma_j$. Constatons d'abord que, d'après les lemmes 4.1.5.6 et 4.1.5.7, $\tilde{\varphi}_i$ est injective pour $i = 1, \dots, j$, $\tilde{\varphi}_j$ étant de plus non surjective.

Montrons que $\widetilde{\mathcal{Z}}_q$ est contenu dans $(\mathrm{im}\, \tilde{\varphi}_j)\delta F^s$. Soit $u\delta F^s \in \widetilde{\mathcal{Z}}_q$. D'après le lemme 4.1.4.4, il s'écrit $u\delta F^s = \mathrm{in}_q(c(\sum_\ell a_\ell \widetilde{H}_\ell))$, où $a_\ell \in \mathbf{C}\{\{t\}\} \bigoplus_{q'=0}^{q-\sigma_{\ell+1}} \mathcal{O}_{q'} = \mathbf{C}\{\{t\}\} \bigoplus_{q'=0}^{q-\sigma_{\ell+1}} \widetilde{E}_{q'}$ (puisque $q - \sigma_1 < \min(1-\alpha_1, \varrho - \alpha_2)$ avec nos hypothèses sur $\alpha_1$ et (6)). L'injectivité des $\tilde{\varphi}_i$ et le fait que $\sigma_i = \sigma_1 + (i-1)/r$, $i = 1, \dots, j$, entraînent alors que $u\delta F^s = \mathrm{in}_q(c(\sum_{\ell=0}^{j-1} a_{\ell, q-\sigma_{\ell+1}} \widetilde{H}_\ell))$, où $a_{\ell, q-\sigma_{\ell+1}}$ désigne la composante de $a_\ell$ dans $\widetilde{E}_{q-\sigma_{\ell+1}}$, $\ell = 0, \dots, L-1$. Ainsi, $u\delta F^s \in (\mathrm{im}\, \tilde{\varphi}_j)\delta F^s$. En particulier, $\widetilde{\mathcal{Z}}_q$ est bien un sous-espace strict de $\mathbf{C}\{\{t\}\}\widetilde{E}_q \delta F^s$, comme annoncé.

La formule donnée s'en déduit alors aisément.

## 4.2 Quelques formules lorsque l'application $(f, g)$ est quasi-homogène

Dans cette section, nous supposerons que l'application $(f, g)$ est quasi-homogène pour un système $\alpha \in (\mathbf{Q}^{*+})^n$ et définit une intersection complète à singularité isolée.

Nous cherchons ici à calculer le polynôme de Bernstein des sections $\delta_L f^s$, $L \in (\mathbf{N}^*)^p$, en utilisant les résultats du chapitre 3.

Rappelons que si $I \subset \mathcal{O}$ est un idéal de colongueur finie engendré par des polynômes quasi-homogènes pour un même système de poids, une *cobase quasi-homogène* de $I$ est un ensemble de polynômes quasi-homogènes induisant une base du $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{O}/I$.

### 4.2.1 Des multiples de $b(\delta_L f^s, s)$

Il y a peu d'espoir de trouver une formule pour le polynôme de Bernstein des sections $\delta_L f^s$, $L \in (\mathbf{N}^*)^p$. En effet, même si $p = 1$, la remarque 4.3.1.6 montre qu'il n'y en a en général pas pour l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta_\ell f^s$, $\ell \in \mathbf{N}^*$. Intéressons nous donc à des formules de multiples de $b(\delta_L f^s, s)$.

Rappelons d'abord des travaux de H. Maynadier ([Md2]). Etant données des indéterminées $s_1, \ldots, s_r$, et une application polynomiale $f = (f_1, \ldots, f_r)$, définissant une intersection complète à singularité isolée à l'origine, et quasi-homogène pour un système de poids $\beta \in (\mathbf{N}^*)^n$, elle détermine des polynômes $b(\underline{s}) \in \mathbf{C}[s_1, \ldots, s_r]$ non nuls, vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$b(\underline{s}) f_1^{s_1} \cdots f_r^{s_r} \in \sum_{i=1}^{r} \mathcal{D}[\underline{s}] f_i f_1^{s_1} \cdots f_r^{s_r}$$

dans $\mathbf{C}[x][1/f_1 \cdots f_r, \underline{s}] f_1^{s_1} \cdots f_r^{s_r}$, introduite par C. Sabbah dans [Sb2].

La preuve du résultat suivant reprend la méthode alors utilisée.

Proposition 4.2.1.1 *Soient $f, g_1, \ldots, g_p \in \mathbf{C}[x]$, des polynômes non constants, quasi-homogènes de degré respectif $1, \varrho_1, \ldots, \varrho_p$, pour un système de poids $\alpha \in (\mathbf{Q}^{+*})^n$, tels que l'application $(f, g_1, \ldots, g_p)$ définit une intersection complète à singularité isolée à l'origine. Soit $\Pi \subset \mathbf{Q}^+$, l'ensemble des degrés des éléments d'une cobase quasi-homogène de l'idéal de colongueur finie $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ engendré par les polynômes quasi-homogènes $f, g_1, \ldots, g_p$, et les mineurs maximaux de la jacobienne de $(f, g)$. Soit $L = (l_1, \ldots, l_p) \in (\mathbf{N}^*)^p$, un multi-indice.*

*Alors, le polynôme de Bernstein de $\delta_L f^s$ est un diviseur de :*

$$(s+1) \prod_{J \leq L} \prod_{q \in \Pi} (s - \varrho_1 j_1 - \cdots - \varrho_p j_p + |\alpha| + q)$$

*où les multi-indices $J = (j_1, \ldots, j_p) \in (\mathbf{N}^*)^p$ sont tels que $j_i \leq l_i$ pour $i = 1, \ldots, p$.*

*Preuve.* Remarquons d'abord que pour tout multi-indice $J \in (\mathbf{N}^*)^n$ et pour tout $u \in \mathbf{C}[x]$ quasi-homogène de degré $q \in \mathbf{Q}^+$, il y a une équation de 'montée de l'ordre' :

$$(s - \varrho.J + |\alpha| + q)u\delta_J f^s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} x_i u \delta_J f^s$$

obtenue à partir de l'identité (3) du lemme 4.1.2.1. En itérant cette équation, il vient :

$$\left[\prod_{q\in\Pi}(s - \varrho.J + |\alpha| + q)\right] \delta_J f^s \subset \sum_{i=1}^{p} \mathcal{D}[s] g_i \delta_J f^s + \mathcal{D}[s](f, \{\Delta^g_K(f)\}_K)\delta_J f^s$$

puisque tout mineur maximal de la jacobienne de $(f, g)$ est au signe près égal à un $\Delta^g_K(f) = [\Delta^g_K, f]$ (voir page 84). Par suite, avec les notations de l'énoncé :

$$\left[\prod_{J\leq L}\prod_{q\in\Pi}(s - \varrho.J + |\alpha| + q)\right] \delta_L f^s \subset \sum_{J\leq L} \mathcal{D}[s](f, \{\Delta^g_K(f)\}_K)\delta_J f^s$$

La formule annoncée résulte alors des relations $\delta_J = g_1^{l_1-j_1} \cdots g_p^{l_p-j_p} \delta_L \in \mathcal{R}$ et $(s+1)\Delta^g_K(f)\delta_J f^s = \Delta^g_K.\delta_J f^{s+1}$.

En mettant à profit la remarque 3.1.3.5, un multiple de moindre degré peut parfois être donné.

PROPOSITION 4.2.1.2 *Soient $f, g_1, \ldots, g_p \in \mathbf{C}[x]$, des polynômes non constants, quasi-homogènes de degré respectif $1, \varrho_1, \ldots, \varrho_p$, pour un système de poids $\alpha \in (\mathbf{Q}^{+*})^n$, tels que l'application $(f, g)$ définit une intersection complète à singularité isolée à l'origine. Soit $L = (l_1, \ldots, l_p) \in (\mathbf{N}^*)^p$, un multi-indice.*

*Supposons que l'idéal $\mathcal{J}' \subset \mathcal{O}$, engendré par $f, g_1^{l_1}, \ldots, g_p^{l_p}$, et les mineurs maximaux de la jacobienne de $(f, g)$, soit de colongueur finie.*

*Alors $b(\delta_L f^s, s)$ divise le polynôme :*

$$(s+1)\prod_{q\in\Pi'}(s - \varrho_1 l_1 - \cdots - \varrho_p l_p + |\alpha| + q)$$

*où $\Pi'$ est l'ensemble des degrés d'une cobase quasi-homogène de l'idéal $\mathcal{J}'$.*

*Preuve.* Rappelons que les opérateurs $\Delta^g_K$ introduits à la page 84 annulent $\delta_L$, et que tout mineur maximal de la jacobienne de $(f, g)$ est au signe près égal à un $\Delta_K^g(f) = [\Delta_K^g, f]$. D'après la remarque 3.1.3.5, nous avons un morphisme $\mathcal{D}[s]$-linéaire surjectif naturel :

$$\mathcal{N}' = \frac{\mathcal{D}[s]}{\mathcal{D}[s](\chi + \varrho.L - s) + \mathcal{D}[s]\mathcal{J}'} \longrightarrow (s+1)\frac{\mathcal{D}[s]\delta_L f^s}{\mathcal{D}[s]\delta_L f^{s+1}}$$

entre deux $\mathcal{D}$-modules de type fini supportés par l'origine. Nous en déduisons alors que $\tilde{b}(\delta_L f^s, s)$ divise le polynôme minimal de l'action de $s$ sur $H^n_{DR}(\mathcal{N}')$. Or cet espace s'identifie à $\mathcal{O}/\mathcal{J}'$, où l'action de $s$ correspond à celle de l'opérateur $H = -\chi + \varrho.L - |\alpha|$. Le résultat s'en déduit, en considérant la matrice de l'action de $H$ dans une cobase quasi-homogène de $\mathcal{O}/\mathcal{J}'$.

REMARQUE 4.2.1.3 Même lorsque $L = (1, \ldots, 1)$, cette formule ne donne en général qu'un multiple de $b(\delta_L f^s, s)$, comme le montre l'exemple qui suit.

Soit $n = 2$, $p = 1$, $f(\underline{x}) = x_1$ et $g(\underline{x}) = x_2^2$. L'application $(f, g)$ définit une intersection complète à singularité isolée. D'après la proposition précédente, le polynôme $(s+1)(s+1/2)$ est un multiple du polynôme de Bernstein de $\delta f^s$. Toutefois, $(s+1/2)$ n'est pas un facteur de $b(\delta f^s, s)$, puisque ce dernier est égal à $s+1$.

### 4.2.2 Le polynôme de Bernstein de $\delta f^s$

Nous nous efforçons ici d'établir l'expression explicite du polynôme de Bernstein de $\delta f^s$.

Constatons d'abord que les propositions 4.2.1.1 et 4.2.1.2 donnent la même formule d'un multiple de $b(\delta f^s, s)$, qui est en général strict (remarque 4.2.1.3).

Faisons maintenant l'hypothèse que l'application $g$ définit une intersection complète à singularité isolée à l'origine.

THÉORÈME 4.2.2.1 *Soient $f, g_1, \ldots, g_p \in \mathbf{C}[x]$, des polynômes non constants, quasi-homogènes pour un même système de poids $\alpha \in (\mathbf{Q}^{+*})^n$, tels que les applications $g = (g_1, \ldots, g_p)$ et $(f, g)$ définissent des intersections complètes à singularité isolée à l'origine. Sans perte de généralité, nous supposerons que $f$ est de degré un. Notons $\varrho \in \mathbf{Q}^{*+}$, le degré de $g_1 \cdots g_p \in \mathbf{C}[x]$, $\Pi \subset \mathbf{Q}^+$ l'ensemble des degrés des éléments d'une cobase quasi-homogène de l'idéal $\mathcal{J}' \subset \mathcal{O}$ engendré par les polynômes quasi-homogènes $f, g_1, \ldots, g_p$, et par les mineurs maximaux de la jacobienne de $(f, g)$. Notons enfin $c(s)$ le polynôme réduit $\prod_{q \in \Pi}(s - \varrho + |\alpha| + q) \in \mathbf{C}[s]$.*

*Alors $b(\delta f^s, s)$ divise $(s+1)c(s)$ et est un multiple de* $\mathrm{ppcm}(s+1, c(s))$. *En particulier, le réduit de $b(\delta f^s, s)$ coïncide avec celui de $(s+1)c(s)$.*

*Preuve.* Constatons que la première relation de divisibilité à été établie à la proposition 4.2.1.2. Reprenons sa preuve. Nous avons une suite exacte de $\mathcal{D}[s]$-modules de type fini supportés par l'origine :

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{N}' = \frac{\mathcal{D}[s]}{\mathcal{D}[s](\chi + \varrho - s) + \mathcal{D}[s]\mathcal{J}'} \;\to\; (s+1)\frac{\mathcal{D}[s]\delta f^s}{\mathcal{D}[s]\delta f^{s+1}} \to 0 \quad (1)$$

Soit $P(s) \in \mathcal{D}[s]$, un représentant d'un élément de $\mathcal{K}$. Il existe alors un opérateur $Q(s) \in \mathcal{D}[s]$ tel que $(s+1)P(s)\delta f^s = Q(s)\delta f^{s+1}$. En d'autres termes, $(s+1)P(s)$ appartient à l'idéal $\mathcal{D}[s]f + \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}[s]}\,\delta f^s$. Or $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}[s]}\,\delta f^s = \mathcal{D}[s](\chi + \varrho - s) + \mathcal{D}[s]\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\delta f^s$. Il résulte alors de la proposition 3.2.1.7 que $(s+1)P(s)$ appartient à l'idéal $\mathcal{D}[s](\chi + \varrho - s) + \mathcal{D}[s]\mathcal{J}'$, c'est-à-dire définit l'élément nul de $\mathcal{K}$

D'autre part, la suite exacte (1) induit celle de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels de dimension finie :

$$0 \to H^n_{DR}(\mathcal{K}) \longrightarrow H^n_{DR}(\mathcal{N}') \longrightarrow \; H^n_{DR}((s+1)\frac{\mathcal{D}[s]\delta f^s}{\mathcal{D}[s]\delta f^{s+1}}) \to 0$$

Rappelons que $c(s)$ est le polynôme minimal de l'action de $s$ sur $H^n_{DR}(\mathcal{N}')$. Puisque $(s+1)$ annule $H^n_{DR}(\mathcal{K})$, le polynôme $c(s)$ coïncide avec $\tilde{b}(\delta f^s, s)$ si $\mathcal{K}$ est nul, et est égal au ppcm de $s+1$ et $\tilde{b}(\delta f^s, s)$ sinon. Le résultat annoncé s'en déduit aisément.

Remarque 4.2.2.2 Sous nos hypothèses, A. Dimca a montré que l'opérateur de monodromie $h$ en degré $n-p-1$ associé à $f : (X,0) \to (\mathbf{C},0)$ est diagonalisable, et a calculé son polynôme caractéristique (cf. [D]). Notre formule permet donc de retrouver autrement les valeurs propres de $h$ (voir le corollaire 1.2.2.2).

Ainsi, lorsque les applications $g$ et $(f,g)$ sont quasi-homogènes pour un même système de poids et définissent des intersections complètes à singularité isolée à l'origine, nous connaissons le polynôme de Bernstein de $\delta f^s$, parfois seulement à la multiplicité de la racine $-1$ près (qui est un ou deux).

L'indétermination peut être levée lorsque la construction du chapitre 3 s'applique. En particulier, nous avons le résultat suivant :

Corollaire 4.2.2.3 (du théorème 3.1.3.3) *Soient $f, g_1, \dots, g_p \in \mathbf{C}[x]$, des polynômes non constants, quasi-homogènes pour un système de poids $\alpha \in (\mathbf{Q}^{*+})^n$, et tels que les applications $(f, g_1, \dots, g_p)$ et $(g_1, \dots, g_i)$, $i = 1, \dots, p$, définissent des intersections complètes à singularité isolée à l'origine.*

*Supposons que $-1$ soit la plus petite racine entière du polynôme de Bernstein de $g_1^s$, et, si $p \geq 2$, de celui de la section $(\dot{1}/g_1 \cdots g_i)g_{i+1}^s$, pour tout $i = 1, \ldots, p-1$, où $\dot{1}/g_1 \cdots g_i \in \mathcal{O}[1/g_1 \cdots g_i]/\sum_{j=1}^{i} \mathcal{O}[1/g_1 \cdots \check{g}_j \cdots g_i]$ est la classe de $1/g_1 \cdots g_i$.*

*Sans perte de généralité, nous supposerons que $f$ est de degré un. Notons $\varrho \in \mathbf{Q}^{*+}$, le degré de $g_1 \cdots g_p \in \mathbf{C}[x]$, $\Pi \subset \mathbf{Q}^+$ l'ensemble des degrés des éléments d'une cobase quasi-homogène de l'idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ engendré par les polynômes quasi-homogènes $f, g_1, \ldots, g_p$, et par les mineurs maximaux de la jacobienne de $(f, g)$.*

*Alors, le polynôme de Bernstein de $\delta f^s$ est :*

$$(s+1) \prod_{q \in \Pi} (s - \varrho + |\alpha| + q) \ .$$

*Preuve.* Nous avons constaté à la page 94 que, sous nos hypothèses, les conditions du paragraphe 3.1.1 sont satisfaites pour $\delta$, l'idéal $\mathcal{J}$ de la condition **(ii)** étant l'idéal introduit dans l'énoncé. Utilisons donc la construction faite au chapitre 3.

Soit $\mathcal{E} \subset \mathbf{C}[x]$, une cobase quasi-homogène de l'idéal $\mathcal{J}$, et $E \subset \mathcal{O}$, le $\mathbf{C}$-espace vectoriel qu'elle engendre. D'après le théorème 3.1.3.3 et la remarque 3.1.2.5, $\tilde{b}(\delta f^s, s)$ est le polynôme minimal de l'action de $s$ sur $E\delta f^s$.

Soit $e \in \mathcal{E}$, un élément de degré $q$. Alors $s.e\delta f^s = c(se\delta f^s)$ par définition de l'action de $s$. Comme l'opérateur $s - \chi - \varrho + q$ annule $e\delta f^s$, nous en déduisons que $s.e\delta f^s = (\varrho - |\alpha| - q)e\delta f^s$. Ainsi, la matrice dans la base $\mathcal{E}$ de l'action de $s$ sur $E\delta f^s$ est diagonale, et le polynôme donné est bien le polynôme de Bernstein de $\delta f^s$.

Remarque 4.2.2.4 • Nous retrouvons bien sûr la formule donnée à la remarque 4.1.3.7.

• Grâce au théorème 4.2.2.1, pour savoir si les conditions sur les racines entières des polynômes de Bernstein considérés dans l'énoncé sont satisfaites, il 'suffit' de calculer les degrés des éléments de cobases quasi-homogènes d'idéaux quasi-homogènes de colongueur finie.

• Lorsque $g_i = x_i$, $i = 1, \ldots, p$, nous retrouvons comme prévu (cf. proposition 1.3.2.1) la formule bien connue ([Mw]) du polynôme de Bernstein de $f|_X(\underline{x}) = f(0, \ldots, 0, x_{p+1}, \ldots, x_n)$, polynôme définissant dans $X$ une singularité isolée.

• Au paragraphe 4.3.1, nous calculons le polynôme $b(\delta f^s, s)$ dans un cas particulier où $\delta$ ne satisfait pas aux conditions du paragraphe 3.1.1 et où le théorème 4.2.2.1 ne permet pas de conclure (ayant $-1$ racine de c(s)). Le résultat trouvé est celui qu'aurait donné la proposition 4.2.2.3.

De plus, le lemme 4.2.3.1 permet de constater que dans le cas particulier où $p = 1$ et $f$ est lisse, sous les seules hypothèses du théorème 4.2.2.1, le polynôme de Bernstein de $\delta f^s$ coïncide avec le polynôme trouvé à la proposition précédente. Il est donc légitime de penser que c'est toujours le cas.

### 4.2.3 Le cas d'une fonction lisse sur une hypersurface

Dans ce paragraphe, l'entier $p$ est égal à un et $f$ est un polynôme non constant, quasi-homogène pour le système $\alpha$, qui définit une hypersurface lisse à l'origine. Notons $\mathcal{R} = \mathcal{O}[1/g]/\mathcal{O}$, $\delta$ la classe de $1/g$ dans $\mathcal{R}$, et, pour tout $\ell \geq 2$, $\delta_\ell \in \mathcal{R}$ celle de $1/g^\ell$.

Comme nous l'avons constaté au paragraphe 1.3.3, c'est le plus simple des cas non triviaux.

Remarquons tout d'abord que, sous nos hypothèses, $b(\delta f^s, s)$ peut s'exprimer en fonction du polynôme de Bernstein de la restriction de $g$ à la sous-variété $\{f = 0\}$.

LEMME 4.2.3.1 *Soient $f, g \in \mathbf{C}[x]$, deux polynômes non constants, à singularité isolée, quasi-homogènes de degré $1, \varrho \in \mathbf{Q}^{*+}$ pour un système de poids $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbf{Q}^{*+})^n$, tels que l'application $(f, g)$ définit une intersection complète à singularité isolée à l'origine. Supposons de plus que l'application $f$ soit lisse à l'origine. Notons $\tilde{g}$ la restriction de $g$ à la sous-variété définie par $f$.*

*Alors, à une constante multiplicative près, le polynôme de Bernstein de $\delta f^s$ est égal à $b(\tilde{g}^s, (s+1)/\varrho - 1)$.*

*Preuve.* Quitte à faire un changement de coordonnées, nous pouvons supposer que $f = x_1$. Notons $\chi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i (\partial/\partial x_i) \in \mathcal{D}$, l'opérateur d'Euler associé au système $\alpha$, et $\overline{\chi} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\partial/\partial x_i) x_i = \chi + |\alpha|$.

En utilisant l'opérateur $s - \varrho - \chi \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}[s]}\, \delta x_1^s$, l'équation de Bernstein pour $\delta x_1^s$ s'écrit :

$$b(\delta x_1^s, \overline{\chi} + \varrho - |\alpha|) \in \mathcal{D} x_1 + \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta x_1^s \quad .$$

C'est-à-dire, d'après la proposition 3.2.1.7 :

$$b(\delta x_1^s, \overline{\chi} + \varrho - |\alpha|) \in \mathcal{D} x_1 + \mathcal{D} g + \sum_{2 \leq i < j \leq n} \mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x_i} g'_{x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} g'_{x_i}) \qquad (2)$$

Notons $\widetilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}$, le sous-anneau des opérateurs différentiels indépendants de $(\partial/\partial x_1)$ et de $x_1$, $\widetilde{\overline{\chi}} \in \widetilde{\mathcal{D}}$, l'opérateur $\sum_{i=2}^n \alpha_i (\partial/\partial x_i) x_i$, et $\tilde{g} \in \mathbf{C}[x_2, \ldots, x_n]$, la restriction de $g$ à l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$. Remarquons que, sous nos hypothèses, $\tilde{g}$ est à singularité isolée, quasi-homogène de degré $\varrho$ pour le système $\widetilde{\alpha} = (\alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

L'équation (2) se réécrit :

$$b(\delta x_1^s, \widetilde{\widetilde{\chi}} + \varrho - |\alpha|) \in \widetilde{\mathcal{D}}\tilde{g} + \sum_{2 \le i < j \le n} \widetilde{\mathcal{D}}(\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{g}'_{x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{g}'_{x_i}) \quad .$$

Ou encore, en remarquant que $\alpha_1 = 1$ et en reconnaissant dans le membre de droite l'expression de l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\tilde{g}^s$ ([Ml1, p. 117] ou [Y, th. 2.19, p. 133])) :

$$b(\delta x_1^s, \varrho(s+1) - 1)\tilde{g}^s \in \widetilde{\mathcal{D}}[s]\tilde{g}^{s+1} \quad .$$

D'où le résultat.

En particulier, nous retrouvons le résultat du corollaire 4.2.2.3 à partir de la formule classique du polynôme de Bernstein d'un polynôme quasi-homogène, à singularité isolée ([Mw]). L'hypothèse sur les racines de $b(g^s, s)$ est donc superflue dans ce cas particulier.

Ce résultat est à rapprocher de la formule obtenue au théorème 1.3.3.3.

Donnons un résultat du même type.

Lemme 4.2.3.2 *Soient $z, y_1, \dots, y_r$, des indéterminées. Soient $h \in \mathbf{C}[x]$ et $v \in \mathbf{C}\{y\}[x, z]$, des polynômes quasi-homogènes en $(x, z)$ pour un système de poids $(\alpha, 1) \in (\mathbf{Q}^{*+})^{n+1}$, de degré $\varrho$ et $\varrho - 1$ avec $\varrho \in \mathbf{Q}^{*+}$, $\varrho > 1$. Supposons que $h$ définisse une singularité isolée à l'origine de $\mathbf{C}^n$. Notons $b(s) \in \mathbf{C}[s]$, son polynôme de Bernstein et $\delta \in \mathbf{C}\{x, y, z\}[1/h + zv]/\mathbf{C}\{x, y, z\}$, la classe de $1/h + zv$.*

*Alors le polynôme de Bernstein de $\delta z^s$ divise $b((s+1)/\varrho - 1)$.*

*Preuve.* Notons $\chi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i (\partial/\partial x_i) \in \mathcal{D}$, l'opérateur d'Euler associé au système $\alpha$. En utilisant l'opérateur $\varrho s - \chi \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}[s]}\, h^s$ et l'expression de l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $h^s$ ([Ml1, p. 117] ou [Y]), l'équation de Bernstein pour $h^s$ s'écrit :

$$b((1/\varrho)\chi) \in \mathcal{D}h + \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, h^s = \mathcal{D}h + \sum_{1 \le i < j \le n} \mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x_j}h'_{x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}h'_{x_j})$$

Cette équation devient :

$$b((1/\varrho)(\chi + \frac{\partial}{\partial z}z)) \in \widetilde{\mathcal{D}}(h + zv) + \widetilde{\mathcal{D}}z + \sum_{1 \le i < j \le n} \widetilde{\mathcal{D}}(\frac{\partial}{\partial x_j}h'_{x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}h'_{x_j}) \qquad (3)$$

où $\widetilde{\mathcal{D}}$ désigne l'anneau des opérateurs différentiels $\mathbf{C}\{x,y,z\}\langle\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z\rangle$. D'autre part, remarquons que :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j}h'_{x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}h'_{x_j}\right]\frac{\dot{1}}{h+zv}z^s=\left[\frac{\partial}{\partial x_i}v'_{x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}v'_{x_i}\right]\frac{\dot{z}}{h+zv}z^s$$

L'identité (3) implique alors :

$$b((1/\varrho)(\chi+\frac{\partial}{\partial z}z))\in\widetilde{\mathcal{D}}z+\mathrm{Ann}_{\widetilde{\mathcal{D}}}\,\delta z^s$$

En constatant que l'opérateur $\chi+(\partial/\partial z)z-1-s+\varrho$ annule $\delta z^s$, nous en déduisons que $b(\delta z^s,s)$ divise $b((s+1)/\varrho-1)$, comme souhaité.

Ce résultat est à rapprocher de la proposition 4.2.1.2. C'est un compromis entre le lemme précédent et le théorème 1.3.3.3.

Pour finir, calculons $b(\delta_\ell f^s,s)$, $\ell\geq 2$, quand l'application $(f,g)$ a les hypothèses de singularité habituelles.

PROPOSITION 4.2.3.3 *Soient $f,g\in\mathbf{C}[x]$, deux polynômes non constants, à singularité isolée, quasi-homogènes de degré $1$, $\varrho\in\mathbf{Q}^{*+}$, pour un système de poids $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in(\mathbf{Q}^{*+})^n$, tels que l'application $(f,g)$ définit une intersection complète à singularité isolée à l'origine. Supposons de plus que l'application $f$ soit lisse. Notons enfin $k\in\mathbf{Z}-\mathbf{N}$, la plus petite racine entière du polynôme de Bernstein de $g$.*

*Alors, pour tout entier $\ell\geq -k$, le polynôme de Bernstein de $\delta_\ell f^s$ est :*

$$(s+1)\prod_{q\in\Pi}(s-\varrho\ell+|\alpha|+q)$$

*où $\Pi\subset\mathbf{Q}^+$ désigne l'ensemble des degrés des éléments d'une cobase quasi-homogène de l'idéal $\mathcal{J}\subset\mathcal{O}$ engendré par $f$ et les $f'_{x_i}g'_{x_j}-f'_{x_j}g'_{x_i}$, $i\neq j$.*

*Preuve.* Remarquons que $g\in\mathcal{J}$, puisque $f$ est lisse et :

$$\varrho g f'_{x_i}=g'_{x_i}f-\sum_{j\neq i}\alpha_j x_j(f'_{x_i}g'_{x_j}-f'_{x_j}g'_{x_i})\tag{4}$$

pour $i=1,\ldots,n$. Si $\ell=1$, cette proposition est donc un cas particulier du corollaire 4.2.2.3. Supposons donc que $\ell\geq 2$.

D'après les vérifications faites en page 94, l'élément $\delta_\ell\in\mathcal{R}$ satisfait aux conditions du paragraphe 3.1.1. De plus, l'idéal de colongueur finie $\mathcal{J}$ est celui associé à un système générateur de $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\delta_\ell$ comprenant $g^\ell$, les opérateurs $g(\partial/\partial x_i)+\ell g'_{x_i}$, $i=1,\ldots,n$, $g'_{x_i}(\partial/\partial x_j)-g'_{x_j}(\partial/\partial x_i)$, $i\neq j$, et $\chi+\varrho\ell$. Le résultat annoncé s'obtient alors à partir de la construction du chapitre 3, exactement comme lors de la preuve du corollaire 4.2.2.3.

Signalons enfin que le théorème 4.2.2.1 a son homologue dans ce cadre.

## 4.3 Exemples de calculs

Dans cette section, nous étudions des exemples où les conditions du paragraphe 3.1.1 ne sont plus satisfaites. Des méthodes moins sophistiquées et plus spécifiques sont alors développées.

L'espace singulier sera toujours un cône non dégénéré, singularité non triviale la plus simple.

### 4.3.1 Couples de quadriques de $\mathbf{C}^4$ définissant une singularité isolée

Soit $X$ le cône quadratique de $\mathbf{C}^4$, défini par $g(\underline{x}) = x_1^2 + \cdots + x_4^2$. Soit $f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i x_i^2$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in \mathbf{C}$ sont deux-à-deux distincts. L'application $(f, g) : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^2$ définit alors une intersection complète à singularité isolée à l'origine.

Notons $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_4\}$ la $\mathbf{C}$-algèbre des germes de fonctions holomorphes à l'origine, $\mathcal{D} = \mathcal{O}\langle \partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_4 \rangle$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathcal{O}$, $\mathcal{R} = \mathcal{O}[1/g]/\mathcal{O}$ le premier groupe de cohomologie locale algébrique de $\mathcal{O}$ à support dans $X$, et $\delta$ (resp. $\delta_2$) la classe dans $\mathcal{R}$ de $1/g$ (resp. $1/g^2$).

Nous souhaitons ici calculer le polynôme de Bernstein de $\delta f^s \in \mathcal{R}[1/f, s] f^s$. D'après le théorème 4.2.2.1, nous savons que le réduit de $b(\delta f^s, s)$ est :

$$b(\delta f^s, s)_{\text{red}} = (s+1)(s+\frac{3}{2})(s+2)$$

et que la multiplicité dans $b(\delta f^s, s)$ de la racine $-1$ est au plus égale à deux.

Rappelons que $X$ a une singularité isolée à l'origine, et que $g^s$ a pour polynôme de Bernstein $(s+1)(s+2)$, réalisé par l'équation :

$$(s+1)(s+2) g^s = \frac{1}{8} \Delta g^{s+1}$$

où $\Delta = (\partial/\partial x_1)^2 + \cdots + (\partial/\partial x_4)^2$ est l'opérateur de Laplace.

C'est l'exemple le plus 'simple' où le corollaire 4.2.2.3 ne permet pas de conclure, la condition **(i)** du paragraphe 3.1.1 n'étant pas satisfaite pour $\delta$ (voir le théorème 3.2.2.3). Lever l'indétermination sur la multiplicité de la racine $-1$ va nécessiter des calculs d'annulateur.

**L'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta$**

Comme $-2$ est la plus petite racine entière du polynôme de Bernstein de $g$, il résulte du théorème 3.2.2.3 que :

$$\operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} \delta_2 = \mathcal{D}g^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x_i} x_j - \frac{\partial}{\partial x_j} x_i) + \mathcal{D}(\chi + 4)$$

où $\chi = x_1(\partial/\partial x_1) + \cdots + x_4(\partial/\partial x_4)$ est l'opérateur d'Euler.

Le calcul de l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta \in \mathcal{R}$ nécessite plus d'efforts.

LEMME 4.3.1.1 *L'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta$ est :*

$$\operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} \delta = \mathcal{D}g + \mathcal{D}\Delta + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x_i} x_j - \frac{\partial}{\partial x_j} x_i) + \mathcal{D}(\chi + 2)$$

*où $\Delta$ désigne l'opérateur de Laplace $(\partial/\partial x_1)^2 + \cdots + (\partial/\partial x_4)^2$.*

*Preuve.* Notons $I$, l'idéal proposé dans l'énoncé. Il est clair que $I \subset \operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} \delta$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $P \in \mathcal{D}$. Cherchons un représentant plaisant pour la classe de $P$ modulo l'idéal $I$. Constatons d'abord qu'il existe dans $\mathcal{D}$ un opérateur $R$ de la forme $R^1(\partial/\partial x_4) + R^2 + r$, avec $R^1$, $R^2 \in \mathbf{C}\{x_1, x_2, x_3\}\langle\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3\rangle$, et $r \in \mathcal{O}$, tel que :

$$P - R \in \mathcal{D}\Delta + \sum_{i=1}^{3} \mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x_4} x_i - \frac{\partial}{\partial x_i} x_4) + \mathcal{D}(\chi + 2) \ .$$

Par suite, un représentant de $P + I$ peut s'écrire :

$$\tilde{P} = \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{3} P_i^1 \frac{\partial}{\partial x_i} + p\right]}_{P^1} \frac{\partial}{\partial x_4} + \underbrace{\sum_{i=1}^{3} P_i^2 \frac{\partial}{\partial x_i}}_{P^2} + q \ ,$$

où $P_i^1$, $P_i^2 \in \mathbf{C}\{x_i, \ldots, x_3\}\langle\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_i\rangle$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $p \in \mathbf{C}\{x_1, x_2, x_3\}$ et $q \in \mathbf{C}\{x_1, x_2, x_3\}[x_4]$ est de degré au plus un en $x_4$.

Supposons que $P \in \operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} \delta$ et montrons que $\tilde{P}$ est nul, ce qui établira l'inclusion souhaitée. Supposons $\tilde{P} \neq 0$. Il résulte du lemme 1.3.1.1 que son degré est alors nécessairement non nul, puisque $\tilde{P} \in \operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} \delta$ et $q \notin g\mathcal{O}$. Notons $d \in \mathbf{N}$, l'entier $\deg \tilde{P} - 1$.

Etant donné un entier $l \in \mathbf{N}$ et un opérateur $Q \in \mathcal{D}$ de degré inférieur ou égal à $l$, notons $\sigma_l(Q) \in \mathcal{O}[\xi]$ son symbole principal si $\deg Q = l$, 0 sinon. Remarquons que :

$$\sigma(\tilde{P}) = \sigma_d(P^1)\xi_4 + \sigma_d(P_1^2)\xi_1 + \sigma_d(P_2^2)\xi_2 + \sigma_d(P_3^2)\xi_3$$

où $\sigma_d(P^1) = p$ si $d = 0$, et $\sigma_d(P^1) = \sigma_{d-1}(P_1^1)\xi_1 + \sigma_{d-1}(P_2^1)\xi_2 + \sigma_{d-1}(P_3^1)\xi_3$ sinon.

Un calcul élémentaire établit l'égalité dans $\mathcal{O}[1/g]$ suivante :

$$\tilde{P}\frac{1}{g} = (-1)^{d+1}(d+1)!\frac{\sigma(\tilde{P})(g'_{x_1}, \dots, g'_{x_4})}{g^{d+2}} + \frac{v}{g^{d+1}}$$

avec $v \in \mathcal{O}$. Comme $\tilde{P}$ annule $\delta$, $\tilde{P}(1/g)$ est un élément de $\mathcal{O}$. De plus, le degré en $x_4$ de $\sigma(\tilde{P})(g'_{x_1}, \dots, g'_{x_4}) = 2^{d+1}\sigma(\tilde{P})(x_1, \dots, x_4)$ est au plus un. Par suite :

$$\sigma(\tilde{P})(x_1, \dots, x_4) = 0 \ .$$

Les opérateurs $P^1$ et $P^2$ étant indépendants de $x_4$ et de $(\partial/\partial x_4)$, cette identité implique que $\sigma(P^\ell)(x_1, x_2, x_3) = 0$, $\ell \in \{1, 2\}$. Montrons que cela entraîne la nullité de $\sigma(\tilde{P})$. Quand $d = 0$, c'est patent.

Supposons que $d \geq 1$. Pour tout $\ell \in \{1, 2\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, posons :

$$\sigma(P_i^\ell) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^i,\ |\alpha| = d} p_{i,\alpha}^\ell(x_i, \dots, x_3)\xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_i^{\alpha_i} \ .$$

La nullité de $\sigma(P^\ell)(x_1, x_2, x_3)$, $\ell \in \{1, 2\}$, s'écrit donc :

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^i,\ |\alpha| = d} \underbrace{p_{i,\alpha}^\ell(x_i, \dots, x_3)x_1^{\alpha_1} \cdots x_i^{\alpha_i+1}}_{\tilde{p}_{i,\alpha}^\ell} = 0$$

En considérant le degré en $x_1$, puis celui en $x_1$, $x_2$, des monômes apparaissant dans les $\tilde{p}_{i,\alpha}^\ell$, nous constatons que pour $\ell \in \{1, 2\}$, $\sigma(P_1^\ell)(x_1)$, $\sigma(P_2^\ell)(x_1, x_2)$ et $\sigma(P_3^\ell)(x_1, x_2, x_3)$ sont nuls. Par suite, $\sigma(P_1^1) = \sigma(P_1^2) = 0$. Enfin, si $\alpha$, $\alpha' \in \mathbf{N}^i$, $i \in \{2, 3\}$, sont deux multi-indices distincts de longueur $d$, alors il existe $k \in \{1, \dots, i-1\}$ tel que $\alpha_k \neq \alpha'_k$ ; en particulier, le degré en $x_k$ d'un monôme de $\tilde{p}_{i,\alpha}$ est différent de celui de tout monôme de $\tilde{p}_{i,\alpha'}$. Ainsi, la nullité des $\sigma(P_i^\ell)(x_1, \dots, x_i)$ entraîne celle des $\tilde{p}_{i,\alpha}^\ell$, c'est-à-dire celle des $\sigma(P_i^\ell)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $\ell \in \{1, 2\}$.

Par suite, le symbole principal de $\tilde{P}$ est nul, ce qui contredit la non-nullité de l'opérateur $\tilde{P}$.

Ainsi, $P \in I$, comme souhaité. Ce qui achève la preuve.

En particulier, l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\delta$ est engendré par des opérateurs de degré au plus deux (et pas moins; voir le théorème 3.2.2.3). Il en résulte que la détermination de $b(\delta f^s, s)$ nécessite l'expression de l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\delta_2 f^s$. Calculons-le donc.

### L'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta_2 f^s$

• Considérons le $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^4}$-Module $\mathcal{N} = \mathcal{D}_{\mathbf{C}^4}\delta_2/\mathcal{D}_{\mathbf{C}^4}\delta$. Son support est clairement contenu dans $X = g^{-1}(0)$. Comme $g$ est lisse en dehors de l'origine, $\mathcal{N}_p = 0$ pour $p \in X - \{0\}$. Ainsi, $\mathcal{N}$ est à support l'origine. De plus, il résulte de l'équivalence *1* $\Leftrightarrow$ *4* de la proposition 1.1.2.10 que $\mathcal{N}_0$ n'est pas nul.

LEMME 4.3.1.2 *Soit $\dot{\delta}_2$ la classe de $\delta_2$ dans $\mathcal{N}_0$. Alors l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\dot{\delta}_2$ est $\mathcal{D}\mathfrak{M}$, où $\mathfrak{M}$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}$.*

*Preuve.* Il est manifeste que $g'_{x_i}$, $i = 1, \ldots, 4$, annulent $\dot{\delta}_2$; d'où l'inclusion $\mathcal{D}\mathfrak{M} \subset \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\dot{\delta}_2$. Le résultat est alors une conséquence de la maximalité dans $\mathcal{D}$ de l'idéal $\mathcal{D}\mathfrak{M}$.

REMARQUE 4.3.1.3 La non-nullité de $\mathcal{N}_0$ peut se voir directement par voie géométrique.

Considérons la suite exacte de $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^4}$-Modules :

$$0 \to \mathcal{D}_{\mathbf{C}^4}\delta \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbf{C}^4}\delta_2 \longrightarrow \mathcal{N} \to 0$$

Le $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^4}$-Module $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^4}\delta_2$ étant isomorphe à $\mathcal{R}$, sa variété caractéristique contient le conormal à l'origine $T^*_{\{0\}}\mathbf{C}^4$, $g$ étant à singularité isolée en 0 ([L.Mb]). D'autre part, $\delta$ est annulée par l'opérateur $\Delta$; comme son symbole principal ne s'annule pas sur $T^*_{\{0\}}\mathbf{C}^4$, la variété caractéristique de $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^4}\delta$ ne contient donc pas le conormal à l'origine. Il en résulte que $\mathcal{N}$ est non nul, de variété caractéristique $T^*_{\{0\}}\mathbf{C}^4$.

• Considérons le $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^4}$-Module :

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathbf{C}^4}\delta_2 f^s/\mathcal{D}_{\mathbf{C}^4}\delta f^s.$$

Remarquons qu'il est supporté par l'origine. En effet, il est patent que son support est contenu dans $X$. D'autre part, l'application $(f,g) : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^2$ définit en 0 une intersection complète à singularité isolée; comme de plus $X$ est à singularité isolée en 0, le lieu critique de $(f,g)$ ne rencontre $X$ qu'en l'origine. Ainsi, en un point $p$ de $X-\{0\}$, il existe un système de coordonnées $\{x,y,z,t\}$, centré en $p$, dans lequel :

$$\mathcal{M}_p = \mathcal{D}_{\mathbf{C}^4,p}\ \frac{\dot{1}}{x^2}y^s/\mathcal{D}_{\mathbf{C}^4,p}\ \frac{\dot{1}}{x}y^s\ ,$$

qui est nul de façon manifeste. Aussi, $\mathcal{M}$ est supporté par l'origine, et non nul, puisque 'en faisant $s=0$', la non-nullité de $\mathcal{N}$ implique celle de $\mathcal{M}$.

LEMME 4.3.1.4 *Soit $\dot{\delta_2 f^s}\in \mathcal{M}_0$, la classe de $\delta_2 f^s$. De deux choses l'une :*

1. *Aucun des $\lambda_i$ n'est nul i.e. $f$ est à singularité isolée. Alors :*

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\dot{\delta_2 f^s} = \mathcal{D}g + \sum_{1\leq i<j\leq 4}\mathcal{D}\vartheta_{i,j} + \mathcal{D}h$$

*où $\vartheta_{i,j} = f'_{x_i}g'_{x_j} - f'_{x_j}g'_{x_i} = 4(\lambda_i-\lambda_j)x_ix_j$ et $h=\sum_{i=1}^4(1/\lambda_i)x_i^2$.*

2. *Un des $\lambda_i$ est nul, par exemple $\lambda_4$. Alors :*

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\dot{\delta_2 f^s} = \mathcal{D}g + \sum_{1\leq i<j\leq 3}\mathcal{D}\vartheta_{i,j} + \mathcal{D}x_4.$$

*Preuve.* Traitons d'abord le premier cas. Notons $I\subset\mathcal{D}$, l'idéal engendré par $g$, $h$ et les $\vartheta_{i,j}$. L'inclusion de $I$ dans $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\dot{\delta_2 f^s}$ résulte des identités dans $\mathcal{R}[1/f,s]f^s$ suivantes :

$$\begin{aligned}
\left[f'_{x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - f'_{x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\right]\delta f^s &= -\vartheta_{i,j}\delta_2 f^s\ ,\quad 1\leq i<j\leq 4 &(1)\\
\sum_{i=1}^4 \frac{x_i}{\lambda_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta f^s &= -2h\delta_2 f^s &(2)
\end{aligned}$$

Soit $P\in\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\dot{\delta_2 f^s}$. En faisant $s=0$, nous en déduisons que $P$ appartient à l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\dot{\delta_2}$, c'est-à-dire à $\mathcal{D}\mathfrak{M}$, d'après le lemme 4.3.1.2. Aussi, l'opérateur $P$ s'écrit :

$$P=\sum_{i=1}^4 P_i g'_{x_i},$$

avec $P_i\in\mathcal{D}$. En remarquant que $\mathcal{D}\mathfrak{M}^3\subset I$ et que $\mathcal{D}x_ix_j\subset I$ pour $i\neq j$, quitte à ajouter à $P$ un élément de $I$, nous pouvons supposer que les coefficients $p_{i,\gamma}$ de $(\partial/\partial x)^\gamma$, $\gamma \in \mathbf{N}^4$, dans l'écriture de $P_i$ avec coefficients à droite, sont des polynômes de $\mathbf{C}[x_i]$ de degré au plus un, pour $i = 1, \dots, 4$.

Nous avons alors les identités dans $\mathcal{R}[1/f, s]f^s$ suivantes :

$$\begin{aligned} P\delta_2 f^s &= -\sum_{i=1}^{4} P_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\delta f^s - s f'_{x_i}\delta f^{s-1}\right] \\ &= Q\delta f^s \end{aligned}$$

pour un opérateur $Q \in \mathcal{D}$, par définition de $P$.

En utilisant la relation d'Euler $sf'_{x_i}\delta f^{s-1} = (1/2)\,(\overline{\chi} - 1)\, f'_{x_i}\delta f^{s-1}$, avec $\overline{\chi} = \sum_{i=1}^4 (\partial/\partial x_i)x_i$, il vient :

$$\sum_{i=1}^{4} P_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} f - \frac{1}{2}(\overline{\chi} - 1) f'_{x_i}\right] + Qf \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta f^{s-1}.$$

D'après la proposition 3.2.1.7, nous avons :

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta f^{s-1} = \mathcal{D}g + \sum_{\ell=1}^{4} \mathcal{D}\Upsilon_\ell$$

avec $\Upsilon_\ell = (\partial/\partial x_i)\vartheta_{j,k} - (\partial/\partial x_j)\vartheta_{i,k} + (\partial/\partial x_k)\vartheta_{i,j}$, où $\{i,j,k,\ell\} = \{1,2,3,4\}$ et $i < j < k$. Nous en déduisons que :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} P_i(\overline{\chi} - 1) f'_{x_i} \in \mathcal{D}f + \mathcal{D}g + \sum_{1 \le i < j \le 4} \mathcal{D}\vartheta_{i,j} \tag{3}$$

En particulier, $\sum_{i=1}^4 P_i(\overline{\chi} - 1) f'_{x_i} \in \mathcal{D}\mathfrak{M}^2$. C'est-à-dire $\sum_{i=1}^4 p_{i,\gamma} f'_{x_i} \in \mathfrak{M}^2$ pour tout $\gamma \in \mathbf{N}^4$.

Les $\lambda_i$ étant tous non nuls, l'idéal jacobien de $f$ coïncide avec $\mathfrak{M}$. Pour tout $\gamma \in \mathbf{N}^4$, nous avons donc une égalité :

$$\sum_{i=1}^{4} (p_{i,\gamma} + m_{i,\gamma}) f'_{x_i} = 0\ ,$$

avec $m_{i,\gamma} \in \mathfrak{M}$. La suite $(f'_{x_1}, \dots, f'_{x_4})$ étant $\mathcal{O}$-régulière, les $p_{i,\gamma}$ appartiennent donc à $\mathfrak{M}$, pour tout $i = 1, \dots, 4$, $\gamma \in \mathbf{N}^4$. Avec notre hypothèse sur les $p_{i,\gamma}$, nous en déduisons que $p_{i,\gamma} = \tilde{p}_{i,\gamma} x_i$, $\tilde{p}_{i,\gamma} \in \mathbf{C}$. Ainsi $P_i = \widetilde{P}_i x_i$, les $\widetilde{P}_i$ étant des opérateurs à coefficients constants.

L'identité (3) devient :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\widetilde{P}_i(\overline{\chi}-2)x_i f'_{x_i} \in \mathcal{D}f + \mathcal{D}g + \sum_{1\leq i<j\leq 4}\mathcal{D}\vartheta_{i,j}$$

L'idéal de droite contenant $\mathcal{D}\mathfrak{M}^3$, il vient :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\widetilde{P}_i x_i f'_{x_i} \in \mathcal{D}f + \mathcal{D}g + \sum_{1\leq i<j\leq 4}\mathcal{D}\vartheta_{i,j}$$

En considérant le coefficient de $(\partial/\partial x)^\gamma$ dans l'écriture d'un opérateur avec ses coefficients à droite, nous avons enfin :

$$\sum_{i=1}^{4}\tilde{p}_{i,\gamma}\lambda_i x_i^2 = u_\gamma f + v_\gamma g$$

avec $u_\gamma, v_\gamma \in \mathbf{C}$. En remplaçant $x_i$ par $x_i/\ell_i$, où $\ell_i^2 = \lambda_i$, $i = 1,\ldots,4$, cette égalité devient :

$$\sum_{i=1}^{4}\tilde{p}_{i,\gamma}x_i^2 = u_\gamma g + v_\gamma h \ .$$

En conséquence, $P = 2\sum_{i=1}^{4}\widetilde{P}_i x_i^2$ appartient à $I$, comme souhaité.

• Supposons maintenant que $\lambda_4$ est nul. Notons $J$, l'idéal de $\mathcal{D}$ engendré par $g$, $x_4$ et les $\vartheta_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq 3$. L'inclusion de $J$ dans $\operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} \dot{\delta_2 f^s}$ résulte de l'équation (1) et de l'identité suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_4}\delta f^s = -2x_4\delta_2 f^s \ .$$

Soit $P \in \operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} \dot{\delta_2 f^s}$. Comme dans le premier cas, quitte à lui ajouter un élément de $J$, nous pouvons supposer que $P$ s'écrit $P = \sum_{i=1}^{3} P_i g'_{x_i}$, avec $P_i \in \mathcal{D}$ et où le coefficient $p_{i,\gamma}$ de $(\partial/\partial x)^\gamma$ dans l'écriture avec coefficients à droite est un polynôme de $\mathbf{C}[x_i]$ de degré au plus un, pour $i \in \{1,2,3\}$, $\gamma \in \mathbf{N}^4$. En recopiant ce qui fut fait lors du premier cas, nous obtenons l'identité :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}P_i(\overline{\chi}-1)f'_{x_i} \in \mathcal{D}f + \mathcal{D}g + \sum_{1\leq i<j\leq 4}\mathcal{D}\vartheta_{i,j} \tag{4}$$

En particulier, $\sum_{i=1}^{3} P_i(\overline{\chi}-1)f'_{x_i}$ appartient à $\mathcal{D}\mathfrak{M}^2$, d'où l'identité :

$$\sum_{i=1}^{3} P_i f'_{x_i} \in \widetilde{\mathcal{D}}\widetilde{\mathfrak{M}}^2$$

où $\widetilde{\mathcal{O}} = \mathbf{C}\{x_1, x_2, x_3\}$, $\widetilde{\mathfrak{M}}$ est son idéal maximal, et $\widetilde{\mathcal{D}}$ est l'anneau des opérateurs différentiels en $(\partial/\partial x_i)$, $i = 1, \dots, 4$, à coefficients dans $\widetilde{\mathcal{O}}$. La suite $(f'_{x_1}, f'_{x_2}, f'_{x_3})$ étant $\widetilde{\mathcal{O}}$-régulière, nous en déduisons comme dans le premier cas que $p_{i,\gamma} = \tilde{p}_{i,\gamma} x_i$, avec $\tilde{p}_{i,\gamma} \in \mathbf{C}$, $i \in \{1,2,3\}$, $\gamma \in \mathbf{N}^4$.

A partir de l'identité (4), on obtient alors les égalités :

$$\sum_{i=1}^{3} \tilde{p}_{i,\gamma} \lambda_i x_i^2 = u_\gamma f + v_\gamma g$$

où $u_\gamma$, $v_\gamma \in \mathbf{C}$, $\gamma \in \mathbf{N}^4$. Ayant $\lambda_4 = 0$, $g$ est le seul terme dépendant de $x_4$. Par suite, $v_\gamma = 0$. Nous en déduisons que :

$$\sum_{i=1}^{3} \tilde{p}_{i,\gamma} x_i^2 = u_\gamma (g - x_4^2) \ ,$$

donc $P = 2\sum_{i=1}^{3} \widetilde{P}_i x_i^2 \in \mathcal{D}(g - x_4^2)$. Ainsi $P \in J$, comme souhaité.

Nous pouvons maintenant calculer l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta_2 f^s$ :

Proposition 4.3.1.5 *Soient $g(\underline{x}) = x_1^2 + \cdots + x_4^2$ et $f(\underline{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_4 x_4^2$, les $\lambda_i$ étant des nombres complexes deux-à-deux distincts.*

*De deux choses l'une :*

1. *Aucun des $\lambda_i$ n'est nul. Alors :*

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta_2 f^s = \mathcal{D}g^2 + \sum_{1 \le i < j \le 4} \mathcal{D}(H_{i,j} g + \vartheta_{i,j}) + \mathcal{D}\left[\sum_{i=1}^{4} \frac{x_i}{\lambda_i} \frac{\partial}{\partial x_i} g + 2h\right]$$

*où $H_{i,j} = (\partial/\partial x_j) f'_{x_i} - (\partial/\partial x_i) f'_{x_j}$, $\vartheta_{i,j} = f'_{x_i} g'_{x_j} - f'_{x_j} g'_{x_i}$ et $h(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{4} (1/\lambda_i) x_i^2$.*

2. *Un des $\lambda_i$ est nul, par exemple $\lambda_4$. Alors :*

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta_2 f^s = \mathcal{D}g^2 + \sum_{1 \le i < j \le 3} \mathcal{D}(H_{i,j} g + \vartheta_{i,j}) + \mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x_4} g + 2x_4) \ .$$

*Preuve.* Traitons le premier cas. Constatons d'abord que l'inclusion de l'idéal proposé dans $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta_2 f^s$ résulte directement des identités (1) et (2) du lemme 4.3.1.4 . Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $P \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta_2 f^s$. En particulier, $P$ annule $\dot{\delta_2 f^s}$ ; donc, par le lemme précédent, $P$ s'écrit :

$$P = Qg + \sum_{1 \le i < j \le 4} Q_{i,j} \vartheta_{i,j} + Rh$$

avec $Q, Q_{i,j}, R \in \mathcal{D}$. Nous avons alors les égalités dans $\mathcal{R}[1/f, s] f^s$ :

$$P\delta_2 f^s = Q\delta f^s - \sum_{1 \le i < j \le 4} Q_{i,j} H_{i,j} \delta f^s - \frac{1}{2} R \sum_{i=1}^{4} \frac{x_i}{\lambda_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta f^s = 0 \ ,$$

grâce aux identités (1) et (2) du lemme 4.3.1.4. Par suite :

$$Q - \sum_{1 \le i < j \le 4} Q_{i,j} H_{i,j} - \frac{1}{2} R \sum_{i=1}^{4} \frac{x_1}{\lambda_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta f^s \ .$$

Donc, par la proposition 3.2.1.7 :

$$Q = \sum_{1 \le i < j \le 4} Q_{i,j} H_{i,j} + \frac{1}{2} R \sum_{i=1}^{4} \frac{x_1}{\lambda_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + Sg + \sum_{\ell=1}^{4} U_\ell \Upsilon_\ell$$

avec $\Upsilon_\ell = (\partial/\partial x_i)\vartheta_{j,k} - (\partial/\partial x_j)\vartheta_{i,k} + (\partial/\partial x_k)\vartheta_{i,j}$, où $\{i,j,k,\ell\} = \{1,2,3,4\}$ et $i < j < k$, et $S$, $U_\ell \in \mathcal{D}$. Ainsi :

$$P = Sg^2 + \sum_{\ell=1}^{4} U_\ell \Upsilon_\ell g + \sum_{1 \le i < j \le 4} Q_{i,j}(H_{i,j} g + \vartheta_{i,j}) + \frac{1}{2} R \left[ \sum_{i=1}^{4} \frac{x_i}{\lambda_i} \frac{\partial}{\partial x_i} g + 2h \right]$$

En remarquant que $\Upsilon_\ell g = g \Upsilon_\ell$ et que :

$$\Upsilon_\ell = \frac{\partial}{\partial x_i}(H_{j,k} g + \vartheta_{j,k}) - \frac{\partial}{\partial x_j}(H_{i,k} g + \vartheta_{i,k}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(H_{i,j} g + \vartheta_{i,j})$$

où $\{i,j,k,\ell\} = \{1,2,3,4\}$ et $i < j < k$, nous trouvons ce qui était annoncé.

Le second cas se traite de la même façon, en remarquant cette fois que :

$$H_{i,4} g + \vartheta_{i,4} = 2\lambda_i x_i (\frac{\partial}{\partial x_4} g + 2x_4)$$

pour $i \in \{1,2,3\}$.

REMARQUE 4.3.1.6 Plus généralement, lorsque $f, g \in \mathbf{C}\{x\}$ définissent une intersection complète $Z$ à l'origine de $\mathbf{C}^n$, le même calcul établit que l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $(\dot{1}/g^2)f^s$ est engendré par les opérateurs :

$$Q - Ug$$

où $Q \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,(1/\dot{g}^2)f^s$, avec $(1/\dot{g}^2)f^s \in \mathcal{D}(\dot{1}/g^2)f^s/\mathcal{D}(\dot{1}/g)f^s$ et $U$ est un opérateur tel que $Q.(\dot{1}/g^2)f^s = U.(\dot{1}/g)f^s$.

La difficulté est de calculer $I = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,(1/\dot{g}^2)f^s$. L'exemple traité plus haut donne peu d'espoir quant à l'obtention d'une formule générale, même si l'on a fait les hypothèses de singularité habituelles sur $Z$ et $g^{-1}(0)$. En effet, $I$ contient l'idéal $\mathcal{D}J$, où $J \subset \mathbf{C}\{x\}$ est l'idéal défini par :

$$J = \{h = \sum_{i=1}^{n} v_i g'_{x_i} \mid \sum_{i=1}^{n} v_i f'_{x_i} \in g\mathbf{C}\{x\},\ v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{C}\{x\}\}$$

grâce à l'équation :

$$-\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\dot{1}}{g} f^s = \frac{\dot{h}}{g^2} f^s \ .$$

### Le polynôme de Bernstein de $\delta f^s$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer $b(\delta f^s, s)$.

PROPOSITION 4.3.1.7 *Soient* $g(\underline{x}) = x_1^2 + \cdots + x_4^2$ *et* $f(\underline{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_4 x_4^2$, *où* $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ *sont des nombres complexes deux-à-deux distincts.*

*Alors* $(s+1)^2(s+3/2)(s+2)$ *est le polynôme de Bernstein de* $\delta f^s$, *où* $\delta$ *désigne la classe dans* $\mathcal{R}$ *de* $1/g$.

*Preuve.* D'après le théorème 4.2.2.1, il suffit de voir que $(s+1)$ divise $\tilde{b}(\delta f^s, s)$. Grâce au lemme 1.1.1.6, quitte à ajouter $-\lambda_4 g$ à $f$, nous pouvons supposer que $\lambda_4$ est nul.

Soit $b(s) \in \mathbf{C}[s]$, un polynôme non nul satisfaisant l'identité suivante dans $\mathcal{R}[1/f, s]f^s$ :

$$b(s)\delta f^s = Q\delta f^{s+1} \tag{5}$$

où $Q \in \mathcal{D}[s]$. Quitte à utiliser la relation d'Euler $\chi\delta f^{s+1} = 2s\delta f^{s+1}$, où $\chi$ est l'opérateur $\sum_{i=1}^{4} x_i(\partial/\partial x_i)$, nous pouvons supposer que $Q \in \mathcal{D}$. Posons $b(s) = (s+1)\tilde{b}(s)$. En faisant $s = -1$, on constate que $Q$ annule $\delta$.

D'après le lemme 4.3.1.1, il s'écrit donc :

$$Q = Ug + V\Delta + \sum_{1\le i<j\le 4} W_{i,j}(x_i\frac{\partial}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial}{\partial x_i}) + Z(\chi+2)$$

où $U, V, W_{i,j}, Z \in \mathcal{D}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} Q\delta f^{s+1} &= 2(s+1)V\left[-4\delta_2 f^{s+1} + (\sum_{i=1}^{3}\lambda_i)\delta f^s + 2s(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2 x_i^2)\delta f^{s-1}\right] \\ &\quad + 2(s+1)\sum_{1\le i<j\le 4} W_{i,j}(\lambda_j-\lambda_i)x_i x_j \delta f^s + 2(s+1)Z\delta f^{s+1} \end{aligned}$$

L'équation (5) implique alors que l'opérateur :

$$fg\tilde{b}(s) + 2V(4f^2 - (\sum_{i=1}^{3}\lambda_i)fg - 2g(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2 x_i^2)s) - 2\sum_{i<j} W_{i,j}(\lambda_j-\lambda_i)x_i x_j fg - 2Zgf^2$$

appartient à l'annulateur dans $\mathcal{D}[s]$ de $\delta_2 f^{s-1}$.

En utilisant la relation d'Euler $\chi\delta_2 f^{s-1} = 2(s-3)\delta_2 f^{s-1}$, nous en déduisons que l'opérateur $\tilde{b}((1/2)\overline{\chi}-1)fg$ appartient à l'idéal :

$$\begin{aligned} I &= \mathcal{D}gf^2 + \mathcal{D}\left[-4f^2 + (\sum_{i=1}^{3}\lambda_i)fg + (\overline{\chi}-2)g(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2 x_i^2)\right] \\ &\quad + \sum_{1\le i<j\le 4}\mathcal{D}x_i x_j fg + \operatorname{Ann}_{\mathcal{D}}\delta_2 f^{s-1} \end{aligned}$$

où $\overline{\chi} = \chi + 4 = (\partial/\partial x_1)x_1 + \cdots + (\partial/\partial x_4)x_4$.

Pour montrer que $\tilde{b}(-1)$ est nul, il suffit de constater que $fg$ ne peut être le terme constant d'un élément de $I$ dans l'écriture des opérateurs avec coefficients à droite.

Notons $E$, le $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension dix des polynômes homogènes de degré deux en $x_1^2, \ldots, x_4^2$. Remarquons que la partie homogène de degré deux en $x_i^2$, $i = 1, \ldots, 4$, du terme constant d'un opérateur de l'idéal $I$ avec l'écriture avec coefficients à droite, est contenue dans le sous $\mathbf{C}$-espace vectoriel $F$ de $E$ engendré par les neuf vecteurs :

$$g^2\ ,\quad 4f^2 - (\sum_{i=1}^{3}\lambda_i)fg + 2g(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2 {x_i}^2)\ ,\quad -3x_4^2 g + 2x_4^4\ ,$$

$$-x_i^2 g + 2x_i^2 x_4^2 \ , \quad i \in \{1,2,3\}$$
$$(-\lambda_i x_i^2 + \lambda_j x_j^2)g + 2(\lambda_i - \lambda_j)x_i^2 x_j^2 \ , \quad 1 \leq i < j \leq 3$$

Un calcul élémentaire établit alors la non-appartenance de $fg$ à $F$ dès que deux quelconques des $\lambda_i$ sont distincts. Par suite, $\tilde{b}(-1)$ est nécessairement nul. D'où le résultat.

REMARQUE 4.3.1.8 Pour pouvoir conclure par un calcul 'à la main', nous sommes obligés de nous ramener au cas où l'un des $\lambda_i$ est nul. Sinon, l'espace $F$ est engendré par douze vecteurs et est égal à $E$ tout entier ; ce qui annihile l'obstruction à la non-nullité de $\tilde{b}(-1)$ exhibée.

Ainsi, la méthode employée ici ne semble pas généralisable, comme le laissait déjà présager la remarque 4.3.1.6.

### Le polynôme de Bernstein de $\delta_2 f^s$

Pour finir, calculons le polynôme de Bernstein de $\delta_2 f^s$

Par un calcul élémentaire, on constate que $\delta_2$ satisfait aux conditions **(i)** et **(ii)** du paragraphe 3.1.1 lorsque l'on prend le système de générateurs apparent dans l'expression de l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\, \delta_2$ donnée à la page 130. Toutefois, la condition **(iii)** n'est alors pas vérifiée. Les résultats du chapitre 3 semblent donc inutilisables. Nous allons néanmoins pouvoir conclure.

PROPOSITION 4.3.1.9 *Soient $g(\underline{x}) = x_1^2 + \cdots + x_4^2$ et $f(\underline{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_4 x_4^2$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ sont des nombres complexes deux-à-deux distincts. Notons $\delta_2 \in \mathcal{R}$, la classe $1/g^2$.*

*De deux choses l'une :*

1. *Aucun des $\lambda_i$ n'est nul. Alors $b(\delta_2 f^s, s) = (s+1)^2 s(s+1/2)$.*
2. *Un des $\lambda_i$ est nul. Alors $b(\delta_2 f^s, s) = (s+1)^2 s(s+1/2)(s+3/2)$.*

*Preuve.* Traitons d'abord le premier cas. Notons $\mathcal{J}' \subset \mathcal{O}$, l'idéal homogène engendré par $f$, $g^2$, et les $f'_{x_i} g'_{x_j} - f'_{x_j} g'_{x_i}$, $i \neq j$. Remarquons qu'il est de co-longueur finie et que l'ensemble $E = \{1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_1^2, x_2^2, x_3^2\}$ en constitue une cobase homogène. D'après la proposition 4.2.1.2, $b(\delta_2 f^s, s)$ divise donc $s(s+1/2)(s+1)^2$. Montrons que ces deux polynômes sont égaux.

Soit $u \in E$, de degré $q$. Nous avons l'identité suivante dans $\mathcal{R}[1/f, s]f^s$ :

$$b(\delta_2 f^s, s) u \delta_2 f^s = Q \delta_2 f^{s+1} \tag{6}$$

où $Q \in \mathcal{D}[s]$. Grâce à la relation d'Euler $\chi u\delta_2 f^{s+1} = (2s-2+q)u\delta_2 f^{s+1}$, où $\chi$ est l'opérateur $\sum_{i=1}^4 x_i(\partial/\partial x_i)$, nous pouvons supposer que $Q \in \mathcal{D}$. En faisant $s=-1$, on constate que l'opérateur $Q$ annule $\delta_2$.

Il résulte alors du calcul de l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\delta_2$ donné en début d'étude que :

$$Q = Ug^2 + \sum_{1\le i<j\le 4} V_{i,j}(x_i\frac{\partial}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial}{\partial x_i}) + W(\chi+4)$$

où $U, V_{i,j}, W \in \mathcal{D}$. Ainsi :

$$Q\delta_2 f^{s+1} = \ 2(s+1)\left[\sum_{1\le i<j\le 4}(\lambda_j-\lambda_i)V_{i,j}x_ix_j + Wf\right]\delta_2 f^s \ .$$

Par division par $(s+1)$ dans l'équation (6), puis en utilisant la relation d'Euler $\chi u\delta_2 f^s = (2s-4+q)u\delta_2 f^s$, il vient :

$$\tilde{b}(\delta_2 f^s, \frac{\overline{\chi}-q}{2})u \in \mathcal{D}f + \sum_{1\le i<j\le 4}\mathcal{D}x_ix_j + \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}\,\delta_2 f^s$$

où $\overline{\chi} = (\partial/\partial x_1)x_1 + \cdots + (\partial/\partial x_4)x_4$ ; puis, d'après la proposition 4.3.1.5 :

$$\tilde{b}(\delta_2 f^s, \frac{\overline{\chi}-q}{2})u \in \mathcal{D}f + \mathcal{D}g + \mathcal{D}\sum_{i=1}^4\frac{x_i^2}{\lambda_i} + \sum_{1\le i<j\le 4}\mathcal{D}x_ix_j \qquad (7)$$

Une vérification simple établit que l'idéal de droite ne contient aucun opérateur dont le terme constant dans l'écriture à droite soit 1, $x_1$ ou $x_1^2$. Par suite, $s(s+1/2)(s+1)$ divise $\tilde{b}(\delta_2 f^s, s)$, comme souhaité.

Le second cas se traite de la même façon, en remarquant que l'ensemble $\{1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_1^2, x_2^2, x_4^2, x_4^3\}$ est une cobase de $\mathcal{J}'$ quand $\lambda_4 = 0$. L'analogue de l'équation (7) est alors :

$$\tilde{b}(\delta_2 f^s, \frac{\overline{\chi}-q}{2})u \in \mathcal{D}f + \mathcal{D}g^2 + \sum_{1\le i<j\le 4}\mathcal{D}x_ix_j + \mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x_4}g + 2x_4)\ .$$

### 4.3.2 Formes quadratiques sur un cône non dégénéré de $\mathbf{C}^3$

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{O}$ désignera l'anneau $\mathbf{C}\{x_1, x_2, x_3\}$ des germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbf{C}^3$, et $\mathcal{D} = \mathcal{O}\langle\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3\rangle$, l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathcal{O}$.

Soit $\mathcal{C} \subset \mathbf{PC}^3$, une conique propre définie par $g \in \mathcal{O}$ et $X \subset \mathbf{C}^3$, son cône affine. Nous souhaitons ici calculer le polynôme de Bernstein de toute forme quadratique $f \in \mathcal{O}$ sur $X$, non nulle. D'après le lemme 1.1.1.6, il ne dépend que de la droite $f + \mathbf{C}g$. Nous sommes donc amenés à considérer le faisceau de coniques de $\mathbf{PC}^3$ engendré par $\mathcal{C}$ et $\{f = 0\}$.

Il est bien connu des géomètres qu'il y a cinq types de faisceaux non dégénérés de coniques projectives complexes, entièrement déterminés par les multiplicités des points d'intersection de deux coniques distinctes du faisceau. De plus, deux tels faisceaux sont du même type si et seulement si il existe une homographie transformant l'un en l'autre ([Bg, prop. 16.5.1, p. 291] par exemple) : à homographie près, il n'y a que cinq faisceaux non dégénérés de coniques projectives complexes.

Enonçons le résultat.

PROPOSITION 4.3.2.1 *Soit $g \in \mathcal{O}$, un polynôme homogène de degré deux, définissant un cône $X \subset \mathbf{C}^3$ non dégénéré. Soit $f \in \mathcal{O}$, une forme quadratique non proportionnelle à $g$. Notons $\mathcal{F} \subset \mathbf{PC}^3$, le faisceau non dégénéré de coniques défini par $f$ et $g$, et $\delta \in \mathcal{O}[1/g]/\mathcal{O}$, la classe de $1/g$.*

*Alors le polynôme de Bernstein de $\delta f^s$ est :*

- $b(\delta f^s, s) = (s+1)^2(s+1/2)(s+3/2)$ *si et seulement si $\mathcal{F}$ a quatre points de base distincts (type I).*
- $b(\delta f^s, s) = (s+1)^2(s+1/2)^2$ *si et seulement si $\mathcal{F}$ a exactement trois points de base distincts (type II) ou bien $\mathcal{F}$ est un faisceau de coniques bitangentes (type III).*
- $b(\delta f^s, s) = (s+1)^2(s+1/3)(s+2/3)$ *si et seulement si $\mathcal{F}$ est un faisceau de coniques osculatrices (type IV).*
- $b(\delta f^s, s) = (s+1)(s+1/4)(s+1/2)(s+3/4)$ *si et seulement si $\mathcal{F}$ est un faisceau de coniques surosculatrices (type V).*

REMARQUE 4.3.2.2 Pour toute forme quadratique $f$ non nulle sur $X$, l'éclatement de l'origine dans $\mathbf{C}^3$ fournit une résolution plongée des singularités du germe $f : (X, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}, 0)$. En utilisant la formule d'A'Campo ([A]), on peut donc calculer facilement les valeurs propres de la monodromie de $f$ sur $X$. Pour chaque type de faisceau de coniques, on retrouve alors, à un entier près, les racines du polynôme de Bernstein déterminés à la proposition 4.3.2.1.

Débutons par l'étude du polynôme de Bernstein d'une forme linéaire sur un cône non dégénéré de $\mathbf{C}^n$.

LEMME 4.3.2.3 *Soit $q \in \mathbf{C}[x]$, un polynôme homogène de degré deux, définissant un cône $\mathcal{X} \subset \mathbf{C}^n$, $n \geq 3$, non dégénéré. Soit $l \in \mathbf{C}[x]$, une forme linéaire non nulle. Notons $H \subset \mathbf{C}^n$, l'hyperplan défini par $l$, et $\eta \in \mathbf{C}\{x\}[1/q]/\mathbf{C}\{x\}$, la classe de $1/q$. De deux choses l'une :*

1. *Soit $H$ coupe transversalement $\mathcal{X}$ à l'origine.*
   *Alors $b(\eta l^s, s) = (s+1)(s+n-2)$.*
2. *Soit $H$ est tangent à $\mathcal{X}$ en un de ses points lisses.*
   *Alors $b(\eta l^s, s) = (s+1)(s+n/2-1)$.*

*Preuve.* Rappelons que le polynôme de Bernstein d'un germe de forme quadratique non dégénérée de $\mathbf{C}^\ell$, $\ell \in \mathbf{N}^*$, est $(s+1)(s+\ell/2)$. Remarquons que dans le premier cas (resp. second cas), il existe un système de coordonnées dans lequel $l = \lambda x_1$ et $q = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ (resp. $q = x_1x_2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2$). Les résultats annoncés sont alors des conséquences directes du théorème 1.3.3.3.

Traitons maintenant chaque cas, par ordre croissant de difficulté.

### Faisceaux à quatre points de base distincts

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau du type $I$, il existe un repère projectif dans lequel ses équations sont :

$$k(x_1^2 - x_3^2) + h(x_2^2 - x_3^2) \ .$$

Ainsi $g = x_1^2 - x_3^2 + \lambda(x_2^2 - x_3^2)$ pour un $\lambda \in \mathbf{C} - \{-1, 0\}$, et $f = x_2^2 - x_3^2$ par exemple.

Pour tout $\lambda \in \mathbf{C} - \{-1, 0\}$, l'application $(f, g) : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^2$ définit une intersection complète à singularité isolée, et l'ensemble $\{1, x_1, x_2, x_3, x_1^2\}$ est une cobase homogène de l'idéal de $\mathcal{O}$ engendré par $f$, $g$, et les mineurs maximaux de la jacobienne de l'application $(f, g)$. De plus, $g$ a pour polynôme de Bernstein $(s+1)(s+3/2)$.

Il résulte alors du corollaire 4.2.2.3 que $b(\delta f^s, s)$ soit le polynôme annoncé.

### Faisceaux de coniques bitangentes

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau du type $III$, nous pouvons prendre pour $\mathcal{F}$ les équations :

$$kx_1^2 + hx_2x_3 \ .$$

Ainsi $g = x_1^2 + \lambda x_2 x_3$ pour un $\lambda \in \mathbf{C}^*$, et $f = x_1^2$ par exemple. Quitte à faire un changement de coordonnées, nous pouvons supposer que $\lambda = 1$.

D'après le lemme 4.3.2.3, $b(\delta x_1^s, s)$ est égal à $(s+1)^2$. Nous en déduisons que $b(\delta f^s, s)$ est un diviseur de $(s+1)^2(s+1/2)^2$. Montrons que ces deux polynômes coïncident.

Soit $b(s) \in \mathbf{C}[s]$, un polynôme non nul vérifiant :

$$b(s)\delta(x_1^2)^s \in \mathcal{D}[s]\delta(x_1^2)^{s+1} \tag{1}$$

En multipliant à gauche par $x_1$ cette équation, puis en substituant $t/2$ à $s$, il vient $b(t/2)\delta x_1^{t+1} \in \mathcal{D}[t]\delta x_1^{t+2}$. Ainsi, $(t+2)^2$ divise $b(t/2)$ i.e. $(s+1)^2$ divise $b(s)$.

En substituant $t/2$ à $s$ dans (1), nous obtenons $b(t/2)\delta x_1^t \in \mathcal{D}[t]\delta x_1^{t+1}$. Donc $(t+1)^2$ divise $b(t/2)$ i.e. $(s+1/2)^2$ divise $b(s)$.

Par suite, $(s+1)^2(s+1/2)^2$ divise $b(\delta f^s, s)$. Nous en déduisons que $b(\delta f^s, s) = (s+1)^2(s+1/2)^2$, comme souhaité.

### Faisceaux de coniques surosculatrices

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau du type $V$, il existe un repère projectif dans lequel ses équations sont :

$$k(x_1^2 - x_2 x_3) + h x_3^2 \ .$$

Ainsi $g = x_1^2 - x_2 x_3 + \lambda x_3^2$ pour un $\lambda \in \mathbf{C}^*$, et $f = x_3^2$ par exemple. Quitte à faire le changement de coordonnée $\tilde{x}_2 = x_2 - \lambda x_3$, nous pouvons supposer que $\lambda$ est nul.

D'après le lemme 4.3.2.3, $b(\delta x_3^s, s) = (s+1)(s+1/2)$. Nous en déduisons que $b(\delta f^s, s)$ divise $(s+1)(s+1/4)(s+1/2)(s+3/4)$. En reprenant la méthode employée lors de l'étude du type $III$, on montre que $(s+1)(s+1/4)(s+1/2)(s+3/4)$ divise $b(\delta f^s, s)$. Le polynôme annoncé est donc bien $b(\delta f^s, s)$.

### Faisceaux de coniques osculatrices

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau du type $IV$, il existe un repère projectif dans lequel ses équations sont :

$$k(x_1^2 - x_2 x_3) + h x_1 x_3 \ .$$

Ainsi $g = x_1^2 - x_2 x_3 + \lambda x_1 x_3$ pour un $\lambda \in \mathbf{C}^*$, et $f = x_1 x_3$ par exemple. Quitte à faire le changement de coordonnée $\tilde{x}_2 = x_2 - \lambda x_1$, nous pouvons supposer que $\lambda$ est nul.

Considérons les équations fonctionnelles suivantes :

$$c(s)\delta f^s \in \mathcal{D}[s]x_3\delta f^s \ , \tag{2}$$

$$d(s)x_3\delta f^s \in \mathcal{D}[s]\delta f^{s+1}$$

où $c(s), d(s) \in \mathbf{C}[s]$. Notons encore $c(s), d(s) \in \mathbf{C}[s]$ les polynômes unitaires, non nuls, de plus bas degré, les vérifiant.

Il est manifeste que $c(s)$ et $d(s)$ divisent $b(\delta f^s, s)$, et que $b(\delta f^s, s)$ divise $c(s)d(s)$. Calculons donc ces deux polynômes.

Remarquons que :

$$\frac{1}{9}\left[x_2\frac{\partial^2}{\partial x_1} - 4x_3\frac{\partial^2}{\partial x_3} + 2(6s+1)\frac{\partial}{\partial x_3}\right] x_3\delta f^s = (s+\frac{1}{3})(s+\frac{2}{3})\delta f^s \tag{3}$$

et

$$\frac{1}{3}\left[4x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_3} - x_1\frac{\partial^2}{\partial x_1} + (4s+3)\frac{\partial}{\partial x_1}\right]\delta f^{s+1} = (s+1)^2 x_3\delta f^s \ .$$

Ainsi $c(s)$ divise $(s+1/3)(s+2/3)$ et $d(s)$ divise $(s+1)^2$. Montrons que ce sont en fait des égalités.

Traitons d'abord le cas du polynôme $c(s)$. Aux points $(0, v, 0) \in \mathbf{C}^3$, $v \neq 0$, suffisamment proches de l'origine, l'équation (2) s'écrit :

$$c(s)\frac{1}{x_1^2 + ux_3}(x_1x_3)^s \in \mathcal{D}[s]x_3\frac{1}{x_1^2+ux_3}(x_1x_3)^s$$

où $u \in \mathbf{C}\{x_2\}$ est une unité. En adaptant la preuve de la proposition 1.3.2.1, nous en déduisons que $c(s)$ est un multiple du polynôme $c'(s) \in \mathbf{C}[s]$, non nul, unitaire de plus bas degré, vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$c'(s)x_1^{3s} \in \mathcal{D}[s]x_1^{3s+2} \ .$$

Par des manipulations analogues à celles de la fin de l'étude du type $III$, on établit facilement que $c'(s) = (s+1/3)(s+2/3)$. En conséquence, le polynôme $c(s)$ est bien réalisé par l'identité (3).

Pour déterminer le polynôme $d(s)$, nous allons calculer l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta f^s$.

Cela nécessite deux résultats techniques.

LEMME 4.3.2.4 *Soient $S_1, \ldots, S_r \in \mathcal{D}$, des opérateurs non nuls tels que la suite $(\sigma(S_1), \ldots, \sigma(S_r))$ est $\mathcal{O}[\xi]$-régulière. Supposons de plus que pour tout couple d'indices distincts $(i,j) \in \{1, \ldots, r\}^2$, il existe une relation dans $\mathcal{D}$ :*

$$[S_i, S_j] = R_1^{i,j} S_1 + \cdots + R_r^{i,j} S_r$$

*où $R_k^{i,j}$ est un opérateur de degré strictement inférieur à $\deg S_i + \deg S_j - \deg S_k$, pour $k = 1, \ldots, r$. Notons $J \subset \mathcal{D}$, l'idéal engendré par $S_1, \ldots, S_r$.*

*Alors l'idéal $\mathrm{gr}\, J \subset \mathcal{O}[\xi]$ est engendré par $\sigma(S_1), \ldots, \sigma(S_r)$.*

*Preuve.* Notons $G \subset \mathcal{O}[\xi]$, l'idéal proposé. L'inclusion de $G$ dans $\mathrm{gr}\, J$ étant patente, établissons sa réciproque.

Soit $P \in J$, un opérateur non nul. Il existe donc des opérateurs $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{D}$ tels que $P = \sum_{k=1}^r A_k S_k$. Posons $m = \max_k \deg A_k S_k$ et $d = \deg P$.

Deux cas sont possibles. Soit $m = d$, et $\sigma(P)$ appartient à $G$ de façon manifeste. Soit $m > d$. Quitte à réordonner les indices, nous pouvons supposer qu'il existe un entier $\ell \leq r$ tel que $\deg A_k S_k = m$ si et seulement si $1 \leq k \leq \ell$. Il y a alors la relation dans $\mathcal{O}[\xi]$ suivante :

$$\sigma(A_1)\sigma(S_1) + \cdots + \sigma(A_\ell)\sigma(S_\ell) = 0 \ .$$

La suite $(\sigma(S_1), \ldots, \sigma(S_\ell))$ étant régulière, il existe une matrice $\ell \times \ell$ antisymétrique $M = (\Upsilon_{i,j})$, à coefficients dans $\mathcal{O}[\xi]$, telle que :

$$\begin{pmatrix} \sigma(A_1) \\ \vdots \\ \sigma(A_\ell) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \sigma(S_1) \\ \vdots \\ \sigma(S_\ell) \end{pmatrix}$$

où $\Upsilon_{i,j}$ est nul ou homogène en $\xi$ de degré $m - \deg S_i - \deg S_j$. Pour tout couple $(i,j) \in \{1, \ldots, \ell\}^2$, soit $\widetilde{\Upsilon}_{i,j} \in \mathcal{D}$, un opérateur relevant $\Upsilon_{i,j}$. L'opérateur $P$ se réécrit :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^{\ell} (A_i - \sum_{j=1}^{\ell} \widetilde{\Upsilon}_{i,j} S_j) S_i + \sum_{i=\ell+1}^{r} A_i S_i + \sum_{1 \leq i < j \leq \ell} \widetilde{\Upsilon}_{i,j} [S_j, S_i] \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \underbrace{(A_i - \sum_{j=1}^{\ell} \widetilde{\Upsilon}_{i,j} S_j + \sum_{1 \leq k < l \leq \ell} \widetilde{\Upsilon}_{k,l} R_i^{l,k})}_{B_i} S_i \\ &\quad + \sum_{i=\ell+1}^{r} \underbrace{(A_i + \sum_{1 \leq k < l \leq \ell} \widetilde{\Upsilon}_{k,l} R_i^{l,k})}_{B_i} S_i \end{aligned}$$

Remarquons que le degré de l'opérateur $B_i$ est strictement inférieur à $m - \deg S_i$. En itérant le procédé un nombre fini de fois, on tombe donc dans le premier cas. Par suite, $\sigma(P) \in G$.

Ainsi, $\operatorname{gr} J$ est bien l'idéal annoncé.

Ce résultat est l'analogue non commutatif du lemme suivant.

LEMME 4.3.2.5 *Soit $\alpha \in (\mathbf{Q}^{*+})^n$, un système de poids. Soient $h_1, \ldots, h_m$, des générateurs d'un idéal $I \subset \mathcal{O}$ dont les parties initiales forment une suite régulière. Alors* $\operatorname{in}(h_1), \ldots, \operatorname{in}(h_m)$ *engendrent l'idéal* $\operatorname{in}(I)$.

Sa preuve en est identique, aux simplifications près.

LEMME 4.3.2.6 *Soient $J \subset \mathcal{D}$, un idéal non nul, et $Q \in \mathcal{D}$, un opérateur tel que l'endomorphisme de $\mathcal{O}[\xi]/\operatorname{gr} J$ induit par la multiplication par $\sigma(Q)$ dans $\mathcal{O}[\xi]$ soit injectif. Soit $R \in \mathcal{D}$ tel que $QR \in J$. Alors $R \in J$.*

*Preuve.* Le polynôme $\sigma(QR) = \sigma(Q)\sigma(R)$ appartenant à $\operatorname{gr} J$, il résulte des hypothèses que $\sigma(R)$ y appartient aussi. Ainsi, il existe $P_1, \ldots, P_\ell \in J$, $A_1, \ldots, A_\ell \in \mathcal{O}[\xi]$, tels que $\sigma(R) = \sum_{i=1}^{\ell} A_i \sigma(P_i)$, où l'on peut supposer que $A_i$ est nul ou homogène en $\xi$ de degré $\deg R - \deg P_i$ sans perte de généralité. Pour $i = 1, \ldots, \ell$, notons $\widetilde{A}_i \in \mathcal{D}$ un opérateur relevant $A_i$. Alors

$$R = \sum_{i=1}^{\ell} \widetilde{A}_i P_i + R_1$$

où $R_1$ est un opérateur de degré strictement inférieur à celui de $R$ tel que $QR_1 \in J$.

Une récurrence sur le degré de l'opérateur $R$ établit donc le résultat.

PROPOSITION 4.3.2.7 *L'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $(\dot{1}/x_1^2 - x_2x_3)(x_1x_3)^s$ est l'idéal*

$$\mathcal{D}(x_1^2 - x_2x_3) + \mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + 3\frac{\partial}{\partial x_2}x_2 - \frac{\partial}{\partial x_3}x_3 - 1) .$$

*Preuve.* Notons $S \in \mathcal{D}$, l'opérateur $(\partial/\partial x_1)x_1 + 3(\partial/\partial x_2)x_2 - (\partial/\partial x_3)x_3 - 1$, et $I \subset \mathcal{D}$, l'idéal engendré par $g$ et $S$. L'inclusion de $I$ dans $\operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} \delta(x_1x_3)^s$ étant manifeste, montrons sa réciproque.

Remarquons que $[S, g] = 2g$ et que $\sigma(S)$ et $g$ sont premiers entre eux. D'après le lemme 4.3.2.4, $\operatorname{gr} I$ est l'idéal de $\mathcal{O}[\xi]$ engendré par $g$ et $\sigma(S)$.

Soit $P \in \mathcal{D}$, un opérateur annulant $\delta(x_1x_3)^s$. Montrons que $P$ appartient à $I$. La suite $(x_3, g, \sigma(S))$ étant régulière, d'après le lemme 4.3.2.6, il suffit d'établir que $x_3^\ell P$ appartient à $I$ pour un entier $\ell \in \mathbf{N}$. Si $\ell$ est plus grand que le degré en $(\partial/\partial x_3)$ de $P$, il existe un opérateur $Q \in \mathcal{D}$ indépendant de $(\partial/\partial x_3)$ et dont les coefficients dans l'écriture avec coefficients à droite appartiennent à $\mathbf{C}\{x_2, x_3\}[x_1]$ et sont de degré au plus un en $x_1$, tel que $x_3^\ell P - Q \in I$. Il reste à montrer que $Q$ est nul.

Supposons que ce ne soit pas le cas. Notons $r \in \mathbf{N}$, le degré en $(\partial/\partial x_1)$ de $Q$. L'opérateur $Q$ s'écrit :

$$Q = U \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^r + R$$

où $R \in \mathcal{D}$ est un opérateur de degré en $(\partial/\partial x_1)$ strictement inférieur à $r$, et $U \in \mathcal{D}$ est un opérateur non nul, ne dépendant que de $(\partial/\partial x_2)$ et dont les coefficients sont polynomiaux de degré au plus un en $x_1$.

Un calcul élémentaire établit l'égalité dans $\mathcal{O}[1/x_1x_3g, s](x_1x_3)^s$ suivante

$$Q\frac{1}{g}(x_1x_3)^s = s(s-1)\cdots(s-r+1)x_3^rU\frac{1}{g}(x_1x_3)^{s-r} + v(x_1x_3)^s$$

où $v \in \mathcal{O}[1/x_1x_3g, s]$ est de degré en $s$ strictement inférieur à $r$. Comme $Q$ annule $\delta(x_1x_3)^s$, $U$ annule donc $\delta$. Remarquons que :

$$U\frac{1}{g} = (-1)^d d! \frac{\sigma(U)(g'_{x_2})}{g^{d+1}} + \frac{w}{g^d}$$

où $d = \deg U$ et $w \in \mathcal{O}$. Ainsi $\sigma(U)(g'_{x_2}) = \sigma(U)(-x_3)$ est divisible par $g$. Ce polynôme en $x_1$ étant aussi de degré au plus un, il est donc nul. Comme $\sigma(U) = u\xi_{x_2}^d$ pour un $u \in \mathcal{O}$, la nullité de $\sigma(U)(-x_3)$ entraîne celle de $\sigma(U)$. Cela contredit la non-nullité de $U$. Ainsi $x_3^\ell P \in I$, comme voulu. Ce qui achève la preuve.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer $d(s)$.

Pour établir que $d(s) = (s+1)^2$, il suffit de montrer que $(s+1)$ n'est pas un multiple de $d(s)$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe alors un opérateur $P \in \mathcal{D}[s]$ tel que :

$$(s+1)x_3\delta f^s = P\delta f^{s+1} \ . \tag{4}$$

Notons $\chi$ l'opérateur d'Euler $x_1(\partial/\partial x_1) + x_2(\partial/\partial x_2) + x_3(\partial/\partial x_3)$. Quitte à utiliser la relation d'Euler pour $\delta f^{s+1}$ :

$$\chi\delta f^{s+1} = 2s\delta f^{s+1} \ ,$$

nous pouvons supposer que $P \in \mathcal{D}$. En faisant $s = -1$, nous constatons que l'opérateur $P$ annule $\delta$. D'après la proposition 3.2.2.7, il s'écrit :

$$\begin{aligned} P &= Ug + V(\chi + 2) + W_1(2x_1\frac{\partial}{\partial x_3} + x_2\frac{\partial}{\partial x_1}) \\ &\quad + W_2(2x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_1}) + W_3(x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}) \end{aligned}$$

avec $U, V, W_i \in \mathcal{D}$. L'identité (4) entraîne alors :

$$(s+1)(x_3 - 2Vf - W_1(2x_1^2 + x_2x_3) - W_2x_3^2 + W_3x_2x_1)\delta f^s = 0 \ .$$

D'après la proposition 4.3.2.7, il vient donc :

$$x_3 \in \mathcal{D}x_1x_3 + \mathcal{D}x_2x_3 + \mathcal{D}x_3^2 + \mathcal{D}x_2x_1 + \mathcal{D}x_1^2 + \mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + 3\frac{\partial}{\partial x_2}x_2 - \frac{\partial}{\partial x_3}x_3 - 1) \ .$$

Ce qui est faux, puisque dans l'écriture des opérateurs avec coefficients à droite, $x_3$ n'est le terme constant d'aucun opérateur de l'idéal de droite.

Ainsi, $(s+1)$ n'est pas un multiple de $d(s)$. Par suite, $d(s)$ est bien égal à $(s+1)^2$.

Il résulte alors des relations de divibilité entre $c(s)$, $d(s)$ et $b(\delta f^s, s)$ établies en début d'étude que $b(\delta f^s, s) = (s+1)^2(s+1/3)(s+2/3)$, comme souhaité.

### Faisceaux à trois points base distincts

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau du type $II$, il y a un système de coordonnées dans lequel ses équations sont :

$$kx_2(x_1 + x_3) + hx_1x_3 \ .$$

Ainsi $g = x_2(x_1 + x_3) + \lambda x_1x_3$ pour un $\lambda \in \mathbf{C}^*$, et $f = x_2(x_1 + x_3)$ par exemple. Pour simplifier les calculs, faisons le changement de coordonnées $(x_1 = \tilde{x}_1 - i\tilde{x}_3, x_2 = (\lambda/2)\tilde{x}_2, x_3 = \tilde{x}_1 + i\tilde{x}_3)$. Nous pouvons alors supposer que $g = x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2$ et $f = x_1x_2$.

Considérons les équations fonctionnelles suivantes :

$$c(s)\delta f^s \in \mathcal{D}[s]x_2\delta f^s \ ,$$

$$d(s)x_2\delta f^s \in \mathcal{D}[s]\delta f^{s+1}$$

où $c(s)$, $d(s) \in \mathbf{C}[s]$. Notons encore $c(s)$, $d(s) \in \mathbf{C}[s]$ les polynômes non nuls, unitaires de plus bas degré, les vérifiant.

Il est manifeste que $c(s)d(s)$ est un multiple de $b(\delta f^s, s)$.

Remarquons que :

$$\frac{1}{4}\left[-x_1\frac{\partial^2}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial^2}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial^2}{\partial x_3} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right.$$
$$\left. + (x_1+x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} - 2\frac{\partial}{\partial x_1} + 4(s+1)\frac{\partial}{\partial x_2}\right] x_2\delta f^s \quad = \quad (s+1)(s+\frac{1}{2})\delta f^s$$

et

$$\frac{1}{4}\left[7\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial^2}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial^2}{\partial x_2} + 4x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right.$$
$$\left. -(3x_1+x_2)\frac{\partial^2}{\partial x_3} + (x_1+3x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right] \delta f^{s+1} \quad = \quad (s+1)(s+\frac{1}{2})x_2\delta f^s$$

Ainsi $c(s)$ et $d(s)$ divisent $(s+1)(s+1/2)$. Il s'ensuit que $b(\delta f^s, s)$ divise $(s+1)^2(s+1/2)^2$. Montrons que ces deux polynômes sont égaux.

Commençons par déterminer l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta f^s$.

PROPOSITION 4.3.2.8 *L'annulateur dans* $\mathcal{D}$ *de* $(1/x_1^2+x_1x_2+x_3^2)(x_1x_2)^s$ *est l'idéal :*

$$\mathcal{D}(x_1^2+x_1x_2+x_3^2) + \mathcal{D}((\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 - \frac{\partial}{\partial x_2}x_2)x_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}x_1^2)$$
$$+ \mathcal{D}((\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 - \frac{\partial}{\partial x_2}x_2)(x_1+x_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}x_1x_3 + x_2) \ .$$

La preuve reprend la méthode employée lors de l'étude des faisceaux du type $IV$.

Notons $I \subset \mathcal{D}$, l'idéal proposé et $S_1$, $S_2$ et $S_3$ les trois opérateurs apparaissant de gauche à droite dans l'expression de $I$ donnée.

LEMME 4.3.2.9 *L'idéal* $\operatorname{gr} I \subset \mathcal{O}[\xi]$ *est engendré par les polynômes* $x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2$, $x_3(x_1\xi_1 - x_2\xi_2) - x_1^2\xi_3$ *et* $(x_1+x_2)(x_1\xi_1 - x_2\xi_2) + x_1x_3\xi_3$.

*Preuve.* Notons $G \subset \mathcal{O}[\xi]$, l'idéal proposé. L'inclusion de $G$ dans $\operatorname{gr} I$ étant manifeste, il suffit de montrer sa réciproque.

Soit $R \in I$, un opérateur non nul. Soient $A_i \in \mathcal{D}$, $i \in \{1,2,3\}$, des opérateurs tels que $R = \sum_{i=1}^{3} A_iS_i$. Posons $r = \deg R$ et $m = \max_i \deg A_iS_i$. Procédons par récurrence sur l'entier $m \geq r$. Si $m = r$, il est clair que $\sigma(R)$ appartient à l'idéal $G$.

Supposons $m > r$. Deux cas sont possibles :

- il existe $i \in \{1,2,3\}$ tel que $\deg A_i S_i < m$. Nous avons alors la relation suivante dans $\mathcal{O}[\xi]$ :

$$\sigma(A_j)\sigma(S_j) + \sigma(A_k)\sigma(S_k) = 0$$

où $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Remarquons que $\sigma(S_j)$ et $\sigma(S_k)$ sont deux polynômes premiers entre eux et qu'il y a dans $\mathcal{D}$ les relations suivantes :

$$[S_1, S_2] = 0 \ , \quad [S_1, S_3] = -2x_1 S_1 \ , \quad [S_2, S_3] = x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} S_1 - x_2 S_2 \ .$$

En procédant comme dans la preuve du lemme 4.3.2.4, on montre alors qu'il existe des opérateurs $B_i$, $i \in \{1,2,3\}$, de degré strictement inférieur à $m - \deg S_i$, tels que $R = \sum_{i=1}^{3} B_i S_i$. Ce qui permet de conclure avec l'hypothèse de récurrence.

- pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $\deg A_i S_i = m$. Du fait des relations dans $\mathcal{D}$ suivantes :

$$\begin{aligned} -\left[\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 - \frac{\partial}{\partial x_2} x_2\right] S_1 + x_3 S_2 + x_1 S_3 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 S_1 + (x_1 + x_2) S_2 - x_3 S_3 &= 0 \end{aligned}$$

il existe $\widetilde{A}_i \in \mathcal{D}$, $i \in \{1,2,3\}$, tels que :

$$R = (\underbrace{A_1 - \widetilde{A}_1}_{C_1}) S_1 + (\underbrace{A_2 - \widetilde{A}_2}_{C_2}) S_2 + (\underbrace{A_3 - \widetilde{A}_3}_{C_3}) S_3$$

où l'entier $m' = \max_i \deg C_i S_i$ est inférieur ou égal à $m$ et l'opérateur $C_3$ est indépendant des variables $x_1$ et $x_3$. S'il existe un indice $i \in \{1,2,3\}$ tel que $\deg C_i S_i < m$, soit on s'est ramené au cas précédent, soit on peut conclure avec l'hypothèse de récurrence.

Montrons que l'on ne peut avoir $\deg C_i S_i$ égal à $m$ pour tout $i$. Sinon, nous avons la relation suivante dans $\mathcal{O}[\xi]$ :

$$\sigma(C_1)\sigma(S_1) + \sigma(C_2)\sigma(S_2) + \sigma(C_3)\sigma(S_3) = 0 \ .$$

Les polynômes $\sigma(S_i)$ étant homogènes en $x$, pour tout entier $\ell \in \mathbf{N}$, la partie homogène de degré $\ell + 2$ en $x$, est donc :

$$\Upsilon_{1,\ell}\sigma(S_1) + \Upsilon_{2,\ell}\sigma(S_2) + \Upsilon_{3,\ell}\sigma(S_3) = 0$$

où $\Upsilon_{i,\ell} \in \mathcal{O}[\xi]$ désigne la partie homogène de degré $\ell$ en $x$ du symbole $\sigma(C_i)$, $i \in \{1,2,3\}$. En considérant le coefficient de $x_2^{\ell+2}$ dans cette équation, il vient $\Upsilon_{3,\ell} = 0$. Par suite, $\sigma(C_3)$ est nul ; ce qui constitue une contradiction.

Ainsi, $\operatorname{gr} I$ est bien l'idéal annoncé.

LEMME 4.3.2.10 *La multiplication par $x_2$ dans $\mathcal{O}[\xi]$ induit un endomorphisme injectif de $\mathcal{O}[\xi]/\operatorname{gr} I$.*

*Preuve.* Soit $A$, $B_1$, $B_2$, $B_3 \in \mathcal{O}[\xi]$, des polynômes tels que :

$$Ax_2 = B_1 g + B_2(x_3(x_1\xi_1 - x_2\xi_2) - x_1^2\xi_3) + B_3((x_1+x_2)(x_1\xi_1 - x_2\xi_2) + x_1x_3\xi_3) .$$

Pour $i \in \{1,2,3\}$, notons $R_i$ (resp. $Q_i$) le reste (resp. le quotient) de la division euclidienne de $B_i$ par $x_2$. L'identité devient :

$$\underbrace{\left[A - \sum_{i=1}^{3} Q_i\sigma(S_i) - R_1x_1 + R_2x_3\xi_2 - R_3(x_1\xi_1 - (x_1+x_2)\xi_2)\right]}_{Q} x_2 + R = 0$$

avec $R = R_1(x_1^2 + x_3^2) + R_2(x_1x_3\xi_1 - x_1^2\xi_3) + R_3(x_1^2\xi_1 + x_1x_3\xi_3)$, indépendant de la variable $x_2$. Réécrivons la nullité de $R$ :

$$(R_1 + R_3\xi_1)(x_1^2 + x_3^2) + (R_2x_1 - R_3x_3)(x_3\xi_1 - x_1\xi_3) = 0 .$$

Les polynômes $x_1^2 + x_3^2$ et $x_3\xi_1 - x_1\xi_3$ étant premiers entre eux, il existe $U \in \mathcal{O}[\xi]$ tel que :

$$R_1 = -R_3\xi_1 + U(x_3\xi_1 - x_1\xi_3) \ , \quad R_2x_1 - R_3x_3 = -U(x_1^2 + x_3^2) \ .$$

La seconde équation se réécrit $(R_2 + Ux_1)x_1 + (Ux_3 - R_3)x_3 = 0$. Il existe donc $V \in \mathcal{O}[\xi]$ tel que $R_3 = Vx_1 - Ux_3$ et $R_2 = -Ux_1 + Vx_3$.

La nullité de $Q$ entraîne alors :

$$A = (Q_1 - V\xi_2)\sigma(S_1) + (Q_2 + U)\sigma(S_2) + Q_3\sigma(S_3) \ .$$

D'où le résultat, d'après le lemme précédent.

*Preuve de la proposition* 4.3.2.8. L'inclusion de $I$ dans $\operatorname{Ann}_{\mathcal{D}} \delta(x_1x_2)^s$ étant manifeste, établissons sa réciproque.

Soit $P \in \mathcal{D}$, un opérateur annulant $\delta(x_1x_2)^s$. Montrons que $P$ appartient à $I$. D'après les lemmes 4.3.2.10 et 4.3.2.6, il suffit de montrer que $x_2^\ell P$ y appartient pour un entier $\ell \in \mathbf{N}$. Si $\ell$ est plus grand que le degré en $(\partial/\partial x_2)$ de $P$, remarquons que $x_2^\ell P$ peut être vu comme un opérateur en $(\partial/\partial x_1)$, $(\partial/\partial x_3)$ et $\Upsilon = x_1(\partial/\partial x_1) - x_2(\partial/\partial x_2)$, à coefficients dans $\mathcal{O}$. Il existe alors un opérateur $Q \in \mathcal{D}$ tel que $x_2^\ell P - Q \in I$, de la forme $Q = Q_1\Upsilon + Q_2$, où $Q_1$ est un opérateur en $(\partial/\partial x_1)$, $(\partial/\partial x_3)$, $\Upsilon$, à coefficients dans $\mathbf{C}\{x_1\}$, et $Q_2$ est un opérateur en $(\partial/\partial x_1)$, $(\partial/\partial x_3)$, dont les coefficients appartiennent à $\mathbf{C}\{x_1, x_2\}[x_3]$ et sont de degré au plus un en $x_3$ dans l'écriture avec coefficients à droite (et donc à gauche aussi). Montrons que $Q$ est nul.

Supposons que ce ne soit pas le cas. Notons $r \in \mathbf{N}$, le degré en $(\partial/\partial x_1)$ de $Q \in \mathcal{O}\langle\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_3, \Upsilon\rangle$. Il s'écrit donc :

$$Q = U\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^r + R$$

où $U \in \mathcal{O}\langle\partial/\partial x_3, \Upsilon\rangle$ est non nul, et $R$ est un opérateur en $(\partial/\partial x_1)$, $(\partial/\partial x_3)$, $\Upsilon$, de degré en $(\partial/\partial x_1)$ strictement inférieur à $r$.

Constatons que $\Upsilon$ annule $(x_1x_2)^s$. Un calcul élémentaire établit alors l'égalité dans $\mathcal{O}[1/x_1x_2g, s](x_1x_2)^s$ suivante :

$$Q\frac{1}{g}(x_1x_2)^s = s(s-1)\cdots(s-r+1)x_2^rU\frac{1}{g}(x_1x_2)^{s-r} + v(x_1x_2)^s$$

où $v \in \mathcal{O}[1/x_1x_2g, s]$ est de degré en $s$ strictement inférieur à $r$. Ainsi, $U$ annule $\delta$. Remarquons que :

$$U\frac{1}{g} = (-1)^d d!\frac{\sigma(U)(\Upsilon(g), g'_{x_3})}{g^{d+1}} + \frac{w}{g^d}$$

où $d = \deg U$ et $w \in \mathcal{O}$. Ainsi $\sigma(U)(x_1^2, x_3)$ est divisible par $g$. D'après la première décomposition de l'opérateur $Q$, cela s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{d} u_i x_1^{2i} x_3^{d-i} + u_0 x_3^d = qg$$

pour un $q \in \mathcal{O}$, où $\sigma(U) = \sum_{i=0}^d u_i\eta^i\xi_3^{d-i}$ avec $u_i \in \mathbf{C}\{x_1\}$ pour $i = 1, \ldots, d$, et $u_0 \in \mathbf{C}\{x_1, x_2\}[x_3]$ est de degré au plus un en $x_3$ (donc en particulier nul ou non divisible par $g$).

Montrons que $\sigma(U) = 0$. De deux choses l'une. Soit $x_3$ divise $q$. Alors $x_3$ divise $u_d$, donc $u_d = 0$. Soit $x_3$ ne divise pas $q$. Alors, en faisant $x_3 = 0$, on remarque que $x_1 + x_2$ divise $u_d$ ; par suite, $u_d$ est nul. En itérant, on constate que $\sigma(U)$ est nul. Ce qui contredit la non-nullité de l'opérateur $U$.

Ainsi $x_2^\ell P \in I$, comme voulu. Ce qui achève la preuve.

Déterminons maintenant $b(\delta f^s, s)$ en procédant comme à la page 148. Nous avons vu que $(s+1)^2(s+1/2)^2$ est un multiple de $b(\delta f^s, s)$. Pour avoir l'égalité, il suffit d'établir qu'aucun polynôme $(s+1)(s+1/2)(s+\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{C}$, n'est un multiple de $b(\delta f^s, s)$.

Supposons que ce ne soit pas le cas. Soient $\lambda \in \mathbf{C}$ et $P \in \mathcal{D}[s]$ tels que :

$$(s+1)(s+1/2)(s+\lambda)\delta f^s = P\delta f^{s+1} \tag{5}$$

Quitte à utiliser la relation d'Euler pour $\delta f^{s+1}$, on peut supposer que $P \in \mathcal{D}$. En constatant alors que $P$ annule $\delta$, il résulte de la proposition 3.2.2.7 que :

$$\begin{aligned} P &= Ug + V(\chi+2) + W_1(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - (2x_1+x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}) \\ &\quad + W_2(2x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - (2x_1+x_2)\frac{\partial}{\partial x_3}) + W_3(x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - 2x_3\frac{\partial}{\partial x_2}) \end{aligned}$$

avec $U, V, W_i \in \mathcal{D}$. L'identité (5) entraîne alors :

$$(s+1)((s+1/2)(s+\lambda) - 2Vx_1x_2 + 2W_1x_1^2 - 2W_2x_2x_3 + 2W_3x_1x_3)\delta f^s = 0$$

En utilisant la relation d'Euler pour $\delta f^s$ et la proposition 4.3.2.8, nous obtenons :

$$(\overline{\chi} - 1 + 2\lambda)\overline{\chi} \in \mathcal{D}x_1^2 + \mathcal{D}x_3^2 + \mathcal{D}x_1x_2 + \mathcal{D}x_2x_3 + \mathcal{D}x_1x_3 + \mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x_2}x_2^2 - x_2)$$

où $\overline{\chi} = (\partial/\partial x_1)x_1 + (\partial/\partial x_2)x_2 + (\partial/\partial x_3)x_3$. En écrivant l'opérateur de gauche avec ses coefficients à droite, il vient :

$$2(\lambda-1)\overline{\chi} + \frac{\partial^2}{\partial x_2}x_2^2 \in \mathcal{D}x_1^2 + \mathcal{D}x_3^2 + \mathcal{D}x_1x_2 + \mathcal{D}x_2x_3 + \mathcal{D}x_1x_3 + \mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x_2}x_2^2 - x_2) .$$

Si $\lambda \neq 1$, c'est clairement faux, puisque aucun opérateur de l'idéal de droite n'a pour coefficient $x_1$ dans son écriture avec coefficients à droite.

Supposons que $\lambda = 1$. On a alors :

$$\frac{\partial}{\partial x_2}x_2 \in \underbrace{\mathcal{D}x_1 + \mathcal{D}x_3 + \mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x_2}x_2^2 - x_2)}_{J} .$$

D'après le lemme 4.3.2.4, l'idéal gr $J \subset \mathcal{O}[\xi]$ est engendré par $x_1$, $x_3$ et $x_2^2\xi_2$. Cet idéal ne contenant pas $x_2\xi_2$, l'opérateur $(\partial/\partial x_2)x_2$ n'appartient pas à l'idéal $J$. Ce qui constitue une contradiction.

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, le polynôme $(s+1)(s+1/2)(s+\lambda)$ n'est pas un multiple de $b(\delta f^s, s)$.

En conséquence, $b(\delta f^s, s) = (s+1)^2(s+1/2)^2$, comme annoncé.

Ce qui achève la preuve de la proposition 4.3.2.1.

# Bibliographie


[A] A'Campo (N.) – *La fonction zêta d'une monodromie.* Comment. Math. Helv., t. **50**, 1975, p. 233-248.

[Bk] Barkats (F.) – *Calcul effectif de groupes de cohomologie locale à support dans des idéaux monomiaux.* Thèse présentée à l'Université de Nice, décembre 1995.

[Bg] Berger (M.) – *Géométrie*, tome 2, Edition Nathan, 1990.

[Bn] Bernstein (I.N.) – *The analytic continuation of generalized functions with respect a parameter.* Funct. Anal. App., t. **6**, 1972, p. 26-40.

[Bs] Biosca (H.) – *Sur l'existence de polynômes de Bernstein associés à une application analytique.* C.R. Acad. Sci. Paris, t. **322**, série I, 1996, p. 659-662.

[Bs1] Biosca (H.) – *Polynômes de Bernstein génériques et relatifs associés à une application analytique.* Thèse présentée à l'Université de Nice, novembre 1996.

[B.B.M.M] Biosca (H.), Briançon (J.), Maisonobe (Ph.) et Maynadier (H.) – *Espaces Conormaux Relatifs II.* Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., t **34**, 1998, p. 223-234.

[Bj] Björk (J.E.) – *Analytic $\mathcal{D}$-Modules and Applications.* Kluwer Academic Publishers, t. **247**, 1993.

[Br1] Briançon (J.) – *Weierstrass préparé à la Hironaka.* Soc. Math. France, Astérisque, t. **7-8**, 1973, p. 67-73.

[Br2] Briançon (J.) – *Sur le degré des relations entre polynômes.* C.R. Acad. Sci. Paris, t. **297**, série I, 1983, p. 553-556.

[B.Ge.M] BRIANÇON (J.), GEANDIER (F.) et MAISONOBE (Ph.) – *Déformation d'une singularité isolée d'hypersurface et polynômes de Bernstein.* Bull. Soc. math. France, t. **120**, 1992, p. 15-49.

[B.Gr.M] BRIANÇON (J.), GRANGER (M.) et MAISONOBE (Ph.) – *Sur les systèmes différentiels relativement spécialisables et l'existence d'équations fonctionnelles relatives.* Bull. Soc. math. France, t. **124**, 1996, p. 217-242.

[B.G.M.M] BRIANÇON (J.), GRANGER (M.), MAISONOBE (Ph.) et MINICONI (M.) – *Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein : cas non dégénéré.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. **39**, fascicule 3, 1989, p. 553-610.

[B.L.M] BRIANÇON (J.), LAURENT (Y.) et MAISONOBE (Ph.) – *Sur les modules différentiels holonomes réguliers, cohérents relativement à une projection.* C.R. Acad. Sci. Paris, t. **313**, série I, 1991, p. 285-288.

[B.M] BRIANÇON (J.) et MAISONOBE (Ph.) – *Caractérisation géométrique de l'existence du polynôme de Bernstein relatif.* Progress in Mathematics, Birkhäuser Verlag, t. **134**, 1996, p. 215-236.

[B.M.M] BRIANÇON (J.), MAISONOBE (Ph.) et MERLE (M.) – *Localisation des systèmes différentiels, stratifications de Whitney et conditions de Thom.* Inventiones Math., t. **117**, 1994, p. 531-550.

[D.K] DELIGNE (P.) et KATZ (N.) – *SGA7. Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique.* Lect. Notes in Math., t **340**, 1972-1973.

[D] DIMCA (A.) – *Monodromy and Betti numbers of weighted complete intersections.* Topology, t. **24**, No 3, 1985, p. 369-374.

[Ge1] GEANDIER (F.) – *Polynômes de Bernstein et déformations à nombre de Milnor constant.* C.R. Acad. Sci. Paris, t. **309**, série I, 1989, p. 831-834.

[Ge2] GEANDIER (F.) – *Déformations à nombre de Milnor constant : quelques résultats sur les polynômes de Bernstein.* Compositio Math., t. **77**, 1991, p. 131-163.

[Gn] GINSBURG (V.) – *Characteristic varieties and vanishing cycles,* Inventiones Math., t. **34**, 1983.

[Gs] GIUSTI (M.) – *Intersections complètes quasi-homogènes. I. Calculs d'invariants.* Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique, 1979.

[Gk.MP] GORESKY (M.) et MACPHERSON (R.) – *Morse Theory and Intersection Homology Theory.* Astérisque, t. **101-102**, 1983, p.135-192.

[Gg.Ms] GRANGER (M.) et MAISONOBE (Ph.) – *A basic course on differential modules.* In $\mathcal{D}$-modules cohérents et holonomes, Hermann, Travaux en cours, t. **45**, 1983, p. 103-168.

[Gr] GREUEL (G.M.) – *Der Gauß-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständeigen Durchschnitten.* Math. Ann., t. **214**, 1975, p. 235-266.

[Gr.H] GREUEL (G.M.) et HAMM (H.) – *Invarianten quasihomogener vollständiger Durschnitte*, Inventiones. Math., t. **49**, 1978, p. 67-86.

[Gt] GROTHENDIECK (A.) – *On the de Rham cohomology of algebraic varieties.* Pub. Math. I.H.E.S., t. **29**, 1966, p. 95-105.

[Ha] HAMM (H.) – *Lokale topologische Eigenchaften komplexer Raume.* Math. Ann., t. **191**, 1971, p. 235-252.

[Hi] HIRONAKA (H.) – *Stratification and flatness.* Real and complex Singularities, Nordic Summer School, Symp. Math., Oslo 1976, 1977, p. 199-265.

[K1] KASHIWARA (M.) – *B-functions and holonomic systems.* Inventiones. Math., t. **38**, 1976, p. 33-53.

[K2] KASHIWARA (M.) – *On the holonomic systems of differential equations II.* Inventiones. Math., t. **49**, 1978, p. 121-135.

[K3] KASHIWARA (M.) – *Quasi-unipotent constructible sheaves.* Journal Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A 28, 1981, p. 757-773.

[K4] KASHIWARA (M.) – *Systems of microdifferential equations.* Progress in Math., t. **34**, 1983.

[K5] KASHIWARA (M.) – *Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations.* Lect. Notes in Math., t. **1016**, 1983, p. 134-142.

[K6] KASHIWARA (M.) – *The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems.* Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., t **20**, 1984, p. 319-365.

[Lf] LAFON (J.P.) – *Algèbre commutative*, tome 1, Hermann, Enseignement des sciences.

[L.Ml] LAURENT (Y.) et MALGRANGE (B.) – *Cycles évanescents, spécialisation et $\mathcal{D}$-modules.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. **45**, fascicule 5, 1995, p. 1353-1405.

[Lê1] LÊ (D.T.) – *Calculation of Milnor number of isolated singularity of complete intersection.* Functional Analysis and its Applications, 1974, p. 127-131.

[Lê2] LÊ (D.T.) – *Some Remarks on Relative Monodromy.* Real and Complex singularities, Oslo Nordic summer school 1976, 1977, p. 397-403.

[Lê3] LÊ (D.T.) – *Le théorème de la monodromie singulier.* C.R. Acad. Sci. Paris, t. **288**, série A, 1979, p. 985-988.

[L.Mb] LÊ (D.T.) et MEBKHOUT (Z.) – *Variétés caractéristiques et variétés polaires.* C.R. Acad. Sci. Paris, t. **296**, série I, 1983, p. 129-132.

[Loo] LOOIJENGA (E.J.N.) – *Isolated Singular Points on Complete Intersections.* London Mathematical Society, Lect. Note Series, t. **77**, Cambridge University Press, 1984.

[Ms] MAISONOBE (Ph.) – *$\mathcal{D}$-modules : an overview towards effectivity.* Computer Algebra and Differential Equations, London Mathematical Society, Lect. Note Series, t. **193**, Cambridge University Press, 1994, p. 21-55.

[Ml1] MALGRANGE (B.) – *Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée.* Lect. Notes in Math., t. **459**, 1975, p. 98-119.

[Ml2] MALGRANGE (B.) – *Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente.* Soc. Math. France, Astérisque, t. **101-102**, 1983, p. 233-267.

[Md1] MAYNADIER (H.) – *Equations fonctionnelles pour une intersection complète quasi-homogène à singularité isolée et un germe semi-quasi-homogène.* Thèse présentée à l'Université de Nice, mai 1996.

[Md2] MAYNADIER (H.) – *Polynômes de Bernstein-Sato associés à une intersection complète quasi-homogène à singularité isolée.* Bull. Soc. math. France, t. **125**, 1997, p. 547-571.

[Mb1] MEBKHOUT (Z.) – *Local cohomology of analytic spaces.* Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., t **12**, 1977, p. 247-256.

[Mb2] MEBKHOUT (Z.) – *Théorèmes de dualité locale pour les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes.* Ark. Mat., t **20**, 1982, p. 111-122.

[Mb3] MEBKHOUT (Z.) – *Une équivalence de catégorie. Une autre équivalence de catégorie.* Compositio Math., t. **51**, 1984, p. 51-88.

[Mb4] MEBKHOUT (Z.) – *Remarques sur l'irrégularité des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes.* C.R. Acad. Sci. Paris, t. **303**, série I, 1986, p. 803-806.

[Mb5] MEBKHOUT (Z.) – *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents.* Travaux en cours, t. **35**, Hermann, 1989.

[Mb6] MEBKHOUT (Z.) – *Le théorème de comparaison entre cohomologies de de Rham d'une variété algébrique complexe et le théorème d'existence de Riemann.* Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci., t. **69**, 1989, p. 47-89.

[Mb7] MEBKHOUT (Z.) – *Les faisceaux d'irrégularité d'un $\mathcal{D}$-module.* Ecole d'été CIMPA-CIMI-UNESCO "Systèmes différentiels", Séville, septembre 1996 (à paraître).

[M.Sb] MEBKHOUT (Z.) et SABBAH (C.) – *$\mathcal{D}_X$-modules et cycles évanescents.* In Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents, Travaux en cours, t. **35**, Hermann, 1989, p. 201-239.

[Mr] MERLE (M.) – *On some points of local analytic geometry.* In $\mathcal{D}$-modules cohérents et holonomes, Hermann, Travaux en cours, t. **45**, 1983, p. 81-101.

[Mn] MILNOR (J.) – *Singular points of complex hypersurfaces.* Ann. of Math. Studies, Princeton, t. **61**, 1968.

[Mw] MIWA (T.) – *Determination of b-functions, the case of quasi-homogeneous, isolated singularity.* En japonais, Suuriken koukyuuroku, t. **225**, 1975,

p. 62-71.

[N-M] NARVÁEZ-MACARRO (L.) – *Le théorème de dualité locale en théorie des $\mathcal{D}$-Modules.* Ecole d'été CIMPA-CIMI-UNESCO "Systèmes différentiels", Séville, septembre 1996 (à paraître).

[O] OAKU (T.) – *Algorithms for b-functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D-modules.* Adv. Appl. Math., t. **19**, 1997, p. 61-105.

[Sb1] SABBAH (C.) – *D-modules et cycles évanescents (d'après B. Malgrange et M. Kashiwara).* Conférence de La Rábida 1984, Hermann, 1987, p. 53-98.

[Sb2] SABBAH (C.) – *Proximité évanescente II. Equations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques.* Compositio Math., t. **64**, 1987, p. 213-241.

[Sb3] SABBAH (C.) – *Appendice à Proximité évanescente II.* Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique Palaiseau, 1988.

[StK] SAÏTO (K.) – *Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen.* Inventiones. Math., t. **14**, 1971, p. 123-142.

[StM] SAÏTO (M.) – *Modules de Hodge polarisables.* Publ. R.I.M.S., t **24**, No. 6, 1988, p. 849-995.

[T] TEISSIER (B.) – *The hunting of invariants in the geometry of discriminants.* Real and Complex singularities, Oslo Nordic summer school 1976, 1977, p. 566-677.

[V] VARCHENKO (A. N.) – *Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology.* Math. USSR Izvestijà, t. **18**, No 3, 1982.

[W] WHITNEY (H.) – *Tangents to an analytic variety.* Ann. of Math., II, série 81, 1965, p. 496-549.

[Y] YANO (T.) – *On the theory of b-functions.* Publ. R.I.M.S., t. **14**, 1978, p. 111-202.

# Table des matières